

6. Το Υπόδειγμα των Επικαλυπτόμενων Γενεών: Ανταλλαγή I

6.1. Ερωτήσεις

Σχολιάστε την εγκυρότητα των παρακάτω προτάσεων. Αν πιστεύετε ότι μια πρόταση είναι σωστή κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις τότε να αναφέρετε αυτές τις προϋποθέσεις.

1 Η κατανάλωση εξαρτάται θετικά από το επιτόκιο.

Απάντηση

Η πρόταση δεν είναι απαραίτητα σωστή. Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση ενός δανειστή, που είναι και η συνήθης περίπτωση σε αυτού του είδους τα υποδείγματα. Το αποτέλεσμα υποκατάστασης που δημιουργείται από μια αύξηση του επιτοκίου τείνει να μειώσει την κατανάλωση της πρώτης περιόδου και να αυξήσει την κατανάλωση της δεύτερης. Από την άλλη μεριά, μια αύξηση του επιτοκίου θα οδηγήσει σε αύξηση του συνολικού του εισοδήματος, διότι με δεδομένη την αποταμίευσή του ο καταναλωτής θα έχει μεγαλύτερο εισόδημα. Επομένως, το άτομο θα τείνει να αυξήσει την κατανάλωση και των δύο περιόδων (θετικό αποτέλεσμα εισοδήματος).¹ Αθροίζοντας τα δύο αποτελέσματα, έχουμε ότι για ένα δανειστή το επιτόκιο έχει ένα αβέβαιο συνολικό αποτέλεσμα στην

¹ Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το εισοδηματικό αποτέλεσμα ή αποτέλεσμα εισοδήματος που αναφέρουμε εδώ διαφέρει από το κοινό εισοδηματικό αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα, το συνολικό εισοδηματικό αποτέλεσμα αποτελείται από δύο όρους: το κοινό εισοδηματικό (όταν αυξάνεται μια τιμή μειώνεται η αγοραστική δύναμη του καταναλωτή) και το εισοδηματικό αποτέλεσμα αποθέματος (όταν αυξάνεται το r , αυξάνεται η αξία του συνολικού αποθέματος του καταναλωτή, $(1+r)\omega_1 + \omega_2$). Το πρόσημο του συνολικού αποτελέσματος εξαρτάται από το αν ο καταναλωτής είναι πιστωτής ή χρεώστης.

κατανάλωση της πρώτης περιόδου. Αντίθετα, η κατανάλωση της δεύτερης περιόδου εξαρτάται θετικά από το επιτόκιο.

Στην περίπτωση ενός δανειζόμενου, το αποτέλεσμα υποκατάστασης είναι και πάλι αρνητικό πάνω στην κατανάλωση της πρώτης περιόδου και θετικό πάνω στην κατανάλωση της δεύτερης. Το αποτέλεσμα εισοδήματος, από την άλλη μεριά, είναι αρνητικό πάνω στις καταναλώσεις και των δύο περιόδων, επειδή με δεδομένο το ποσό του δανεισμού, ο καταναλωτής πρέπει να πληρώσει μεγαλύτερο τόκο όταν αυξάνεται το επιτόκιο. Επομένως, για ένα δανειζόμενο το επιτόκιο επιδρά αρνητικά πάνω στην κατανάλωση της πρώτης περιόδου και έχει αβέβαιο αποτέλεσμα πάνω στην κατανάλωση της δεύτερης περιόδου. Βλέπουμε λοιπόν ότι η πρόταση είναι σωστή μόνο αν αναφέρεται στην κατανάλωση της δεύτερης περιόδου ενός δανειστή.

2. Η κατανάλωση εξαρτάται αρνητικά από τα αποθέματα.

Απάντηση

Η συνηθισμένη περίπτωση είναι αυτή κατά την οποία η κατανάλωση και των δύο περιόδων είναι κανονικό αγαθό. Κάτω από αυτήν την προϋπόθεση, η κατανάλωση και των δύο περιόδων εξαρτάται θετικά από τα αποθέματα και επομένως η πρόταση είναι λανθασμένη.

Για λόγους πληρότητας της απάντησης, ας εξετάσουμε και την ασυνήθη περίπτωση του κατώτερου αγαθού. Γνωρίζουμε από τη μικροοικονομική θεωρία, ότι ένα αγαθό είναι κατώτερο όταν μια αύξηση του εισοδήματος, με δεδομένους όλους του άλλους παράγοντες, οδηγεί σε μείωση της ζητούμενης ποσότητας. Υπενθυμίζεται ακόμη ότι στην περίπτωση δύο αγαθών δεν είναι δυνατόν να είναι κατώτερα και τα δύο. Στην προκειμένη περίπτωση, υπάρχουν δύο αγαθά, οι καταναλώσεις των δύο περιόδων. Επίσης, τα αποθέματα έχουν το ρόλο του εισοδήματος και το επιτόκιο το ρόλο της σχετικής τιμής. Επομένως, η πρόταση μπορεί να είναι σωστή μόνο αν αναφέρεται σε μία από τις δύο καταναλώσεις και υπό την προϋπόθεση ότι έχουμε την ασυνήθη περίπτωση όπου η εν λόγω κατανάλωση είναι κατώτερο αγαθό.

3. Μια μεταβολή στο επιτόκιο έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα υποκατάστασης πάνω στην κατανάλωση της πρώτης περιόδου.

Απάντηση

Η πρόταση είναι σωστή. Το μικτό επιτόκιο $1+r$ είναι η τιμή της κατανάλωσης την πρώτη περίοδο και, όπως γνωρίζουμε από τη μικροοικονομική θεωρία, μια μεταβολή της τιμής έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα υποκατάστασης πάνω στη ζητούμενη ποσότητα.

4. Μια μεταβολή στο επιτόκιο έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα υποκατάστασης πάνω στην κατανάλωση της δεύτερης περιόδου.

Απάντηση

Η πρόταση είναι λανθασμένη. Το μικτό επιτόκιο $1+r$ ισούται με το αντίστροφο της τιμής της κατανάλωσης τη δεύτερη περίοδο $[=1/(1+r)]$. Γνωρίζουμε ότι μια μεταβολή της τιμής έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα υποκατάστασης πάνω στη ζητούμενη ποσότητα. Κατά συνέπεια, μια μεταβολή του επιτοκίου θα οδηγήσει σε ένα θετικό αποτέλεσμα υποκατάστασης πάνω στην κατανάλωση της δεύτερης περιόδου.

5. Μια μεταβολή στο επιτόκιο έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα εισοδήματος πάνω στην κατανάλωση της πρώτης περιόδου.

Απάντηση

Η πρόταση είναι λανθασμένη όταν αναφέρεται σε δανειστή. Μια αύξηση του επιτοκίου θα αυξήσει τον τόκο που θα λάβει ένας δανειστής και επομένως, θα αυξήσει το συνολικό εισόδημα και την κατανάλωση της πρώτης περιόδου. Επομένως, το εισοδηματικό αποτέλεσμα ή αποτέλεσμα εισοδήματος είναι θετικό.

Αντίθετα στην περίπτωση ενός δανειζόμενου (χρεώστη), μια αύξηση του επιτοκίου θα αυξήσει τον τόκο που πρέπει να πληρώσει ο καταναλωτής και επομένως θα μειώσει το συνολικό του εισόδημα και

στη συνέχεια την κατανάλωσή του την πρώτη περίοδο. Σε αυτήν την περίπτωση η πρόταση είναι σωστή.

6. Μια μεταβολή στο επιτόκιο έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα εισοδήματος πάνω στην κατανάλωση της δεύτερης περιόδου.

Απάντηση

Η πρόταση είναι λανθασμένη όταν αναφέρεται σε δανειστή. Όπως είδαμε στην προηγούμενη ερώτηση μια αύξηση του επιτοκίου θα αυξήσει το εισόδημα ενός δανειστή. Επομένως, θα αυξήσει την κατανάλωση της δεύτερης περιόδου (θετικό εισοδηματικό αποτέλεσμα). Αντίθετα, η πρόταση είναι σωστή όταν αναφέρεται σε χρεώστη.

7. Μια μεταβολή στο επιτόκιο έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα υποκατάστασης πάνω στην αποταμίευση.

Απάντηση

Η πρόταση είναι λανθασμένη. Η αποταμίευση βρίσκεται σε αντίθετη σχέση με την κατανάλωση της πρώτης περιόδου (θυμηθείτε ότι $s_t = \omega_t - c_{1t}$). Επομένως, αφού, όπως είδαμε στην Ερώτηση 3, το επιτόκιο έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα υποκατάστασης πάνω στην κατανάλωση της πρώτης περιόδου, θα έχει ένα θετικό αποτέλεσμα υποκατάστασης πάνω στην αποταμίευση.

8. Σε μια κλειστή οικονομία η ισορροπία είναι αυτάρκης.

Απάντηση

Σε μια κλειστή οικονομία η ισορροπία είναι αυτάρκης όταν όλα τα άτομα έχουν τις ίδιες προτιμήσεις και αποθέματα ή δεν επιτρέπεται ο δανεισμός.

9. Σε μια μικρή ανοικτή οικονομία η ισορροπία είναι αυτάρκης.

Απάντηση

Η πρόταση είναι λανθασμένη. Γενικά η ισορροπία σε μια μικρή ανοικτή οικονομία δεν είναι αυτάρκης και υπάρχουν συναλλαγές με τον υπόλοιπο κόσμο. Η μόνη περίπτωση που αυτό δε συμβαίνει είναι όταν το διεθνές επιτόκιο είναι ίσο με το επιτόκιο που θα επικρατούσε αν η οικονομία ήταν κλειστή. Η πιθανότητα να συμβεί κάτι τέτοιο στην πράξη είναι μηδενική.

10. Το μικτό επιτόκιο σχετίζεται με το λόγο των τιμών των καταναλώσεων δύο διαδοχικών περιόδων.

Απάντηση

Το μικτό επιτόκιο είναι ίσο με τη σχετική τιμή της κατανάλωσης της πρώτης περιόδου. Συγκεκριμένα,

$$1 + r_{t+1} = \frac{\text{τιμή της κατανάλωσης την πρώτη περίοδο}}{\text{τιμή της κατανάλωσης τη δεύτερη περίοδο}}$$

6.2. Ασκήσεις

1. Έστω μια οικονομία επικαλυπτόμενων γενεών στην οποία $N_0 = 100$ και $n = 2\%$. Υπολογίστε τον αριθμό των νέων ατόμων, τον αριθμό των ηλικιωμένων ατόμων, καθώς επίσης και το συνολικό πληθυσμό την τέταρτη περίοδο (δηλαδή για $t = 4$).

Απάντηση

Ο αριθμός των ηλικιωμένων ατόμων την τέταρτη περίοδο είναι ίσος με τον αριθμό των ατόμων που γεννήθηκαν την τρίτη περίοδο²

² Αγνοούμε το γεγονός ότι ο πληθυσμός πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός.

$$N_3 = (1+n)^3 N_0 = (1+0.02)^3 \times 100 = 106.121$$

Ο αριθμός των νέων ατόμων την τέταρτη περίοδο είναι

$$N_4 = (1+0.02)^4 \times 100 = 108.243$$

Τέλος, ο συνολικός πληθυσμός της οικονομίας την τέταρτη περίοδο είναι

$$N_3 + N_4 = 106.121 + 108.243 = 214.364.$$

2. Επιβεβαιώστε ότι με τους δεδομένους περιορισμούς στις παραμέτρους β και ρ οι συναρτήσεις

$$u_t = c_{1t} (c_{2t+1})^\beta, \quad \beta > 0,$$

και

$$v_t = (c_{1t})^\rho + \beta (c_{2t+1})^\rho, \quad \beta > 0, \quad \rho \in (0,1),$$

είναι αποδεκτές ως συναρτήσεις χρησιμότητας.

Απάντηση

Θα πρέπει να δείξουμε ότι οι δεδομένες συναρτήσεις έχουν θετικές οριακές χρησιμότητες και οι καμπύλες αδιαφορίας που προκύπτουν από αυτές είναι κυρτές. Οι άλλες ιδιότητες, όπως ότι οι καμπύλες αδιαφορίας δεν τέμνονται και καλύπτουν όλο το επίπεδο, είναι προφανείς. Ξεκινάμε με την πρώτη συνάρτηση

$$u_t = c_{1t} (c_{2t+1})^\beta.$$

Οι οριακές χρησιμότητες είναι θετικές

$$\frac{\partial u_t}{\partial c_{1t}} = (c_{2t+1})^\beta > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial c_{2t+1}} = \beta c_{1t} (c_{2t+1})^{\beta-1} > 0,$$

όταν τα c_{1t} , c_{2t+1} παίρνουν θετικές τιμές και $\beta > 0$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι καμπύλες αδιαφορίας είναι κυρτές προς την αρχή των αξόνων ή, με άλλα λόγια, ότι η συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη. Σχηματίζουμε πρώτα τη φραγμένη Εσσιανή μήτρα (bordered Hessian)

$$\begin{pmatrix} 0 & (c_{2t+1})^\beta & \beta c_{1t} (c_{2t+1})^\beta \\ (c_{2t+1})^\beta & 0 & \beta (c_{2t+1})^{\beta-1} \\ \beta c_{1t} (c_{2t+1})^{\beta-1} & \beta (c_{2t+1})^{\beta-1} & \beta(\beta-1)c_{1t} (c_{2t+1})^{\beta-2} \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα D_2 είναι

$$D_2 = \beta c_{1t} (c_{2t+1})^{\beta(\beta-2)} > 0.$$

Επομένως, $(-1)^2 D_2 > 0$. Επίσης η ορίζουσα D_1 είναι

$$D_1 = -(c_{2t+1})^{2\beta} < 0$$

και επομένως $(-1)^1 D_1 < 0$. Δηλαδή ικανοποιείται η ικανή συνθήκη για να είναι η συνάρτηση οιονεί κοίλη $(-1)^r D_r > 0$ για $r = 1, 2$.³

Για τη δεύτερη συνάρτηση που δίνεται έχουμε

³ βλ. Sydsaeter and Hammond 1995, σελ. 647.

$$\frac{\partial v_t}{\partial c_{1t}} = \rho (c_{2t+1})^{\rho-1} > 0 \quad \text{αν} \quad \rho > 0,$$

$$\frac{\partial v_t}{\partial c_{2t+1}} = \rho \beta (c_{2t+1})^{\rho-1} > 0 \quad \text{αν} \quad \rho, \beta > 0.$$

Η φραγμένη Εσσιανή μήτρα είναι

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho (c_{1t})^{\rho-1} & \rho \beta (c_{2t+1})^{\rho-1} \\ \rho (c_{1t})^{\rho-1} & \rho (\rho-1) (c_{1t})^{\rho-2} & 0 \\ \rho \beta (c_{2t+1})^{\rho-1} & 0 & \rho (\rho-1) (c_{2t+1})^{\rho-2} \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα D_2 είναι

$$D_2 = -\rho^3 (\rho-1) (c_{1t})^{\rho-2} (c_{2t+1})^{\rho-2} \left[(c_{1t})^\rho + \beta^2 (c_{2t+1})^\rho \right].$$

Επομένως με δεδομένο ότι $\rho > 0$ και $\beta > 0$, $(-1)^2 D_2 > 0$, αν $\rho < 1$.

Τέλος,

$$D_1 = -\rho^2 (c_{1t})^{2(\rho-1)} < 0$$

και επομένως, $(-1)^1 D_1 < 0$.

3. Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας

$$\ln c_{1t} + \beta \ln c_{2t+1}, \quad \text{όπου} \quad \beta > 0.$$

Βρείτε την κατανάλωση του ατόμου την πρώτη περίοδο και τη δεύτερη περίοδο.

Απάντηση

Το άτομο αντιμετωπίζει δύο εισοδηματικούς περιορισμούς, έναν για κάθε περίοδο:

$$c_{1t} + s_t = \omega_1 \quad (1)$$

και

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + \omega_2. \quad (2)$$

Συνδυάζοντας αυτούς τους δύο περιορισμούς, εξαλείφοντας την αποταμίευση s_t , παίρνουμε τον δια βίου εισοδηματικό περιορισμό, ο οποίος σε όρους παρούσας αξίας είναι

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + r_{t+1}} = \omega_1 + \frac{\omega_2}{1 + r_{t+1}}. \quad (3)$$

Για τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης χρησιμότητας

$$\ln c_{1t} + \beta \ln c_{2t+1}, \quad \text{όπου } \beta > 0 \quad (4)$$

υπό τον εισοδηματικό περιορισμό (3) σχηματίζουμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L = \ln c_{1t} + \beta \ln c_{2t+1} + \lambda \left(\omega_1 + \frac{\omega_2}{1 + r_{t+1}} - c_{1t} - \frac{c_{2t+1}}{1 + r_{t+1}} \right) \quad (5)$$

όπου λ δηλώνει τον πολλαπλασιαστή Lagrange. Οι αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο είναι

$$\frac{\partial L}{\partial c_{1t}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c_{1t}} = \lambda \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{2t+1}} = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{c_{2t+1}} = \frac{\lambda}{1 + r_{t+1}} \quad (7)$$

και ο εισοδηματικός περιορισμός (εξίσωση 3). Διαιρώντας τις εξισώσεις (6) και (7) κατά μέλη παίρνουμε τη γνωστή σχέση

$$\frac{c_{2t+1}}{\beta c_{1t}} = 1 + r_{t+1}, \quad (8)$$

σύμφωνα με την οποία ο οριακός λόγος υποκατάστασης είναι ίσος με το λόγο των τιμών. Συνδυάζοντας την εξίσωση (8) με τον εισοδηματικό περιορισμό (3) έχουμε

$$c_{1t} = \frac{1}{1 + \beta} \frac{\omega_{t+1}}{1 + r_{t+1}}, \quad (9)$$

$$c_{2t+1} = \frac{\beta}{1 + \beta} \omega_{t+1}, \quad (10)$$

όπου

$$\omega_{t+1} \equiv (1 + r_{t+1})\omega_1 + \omega_2. \quad (11)$$

4. Να επαναληφθεί η Άσκηση 3 χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση χρησιμότητας

$$u_t = c_{1t}^\rho + \beta c_{2t+1}^\rho, \quad \text{όπου } \beta > 0 \text{ και } \rho = \frac{1}{2}.$$

Απάντηση

Γνωρίζουμε ότι το σημείο μεγιστοποίησης του καταναλωτή περιγράφεται α) από την εξίσωση του ΟΛΥ με το λόγο των τιμών $(1 + r_{t+1})$ και β) από τον δια βίου εισοδηματικό περιορισμό. Η πρώτη εξίσωση είναι (δείξτε αναλυτικά τον τρόπο εξαγωγής της χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Lagrange)

⁴ Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση χρησιμότητας, $\ln c_{1t} + \beta \ln c_{2t+1}$, δίνει τις ίδιες συναρτήσεις ζήτησης με τη συνάρτηση χρησιμότητας, $c_{1t} + c_{2t+1}^\beta$, αφού η πρώτη συνάρτηση είναι ένας θετικός μονότονος μετασχηματισμός της δεύτερης (Επιβεβαιώστε το! Βλ. και Παλυβός 2008, Παράδειγμα 6.3)

$$\frac{(c_{1t})^{-1/2}}{\beta(c_{2t+1})^{-1/2}} = 1 + r_{t+1},$$

ή

$$c_{2t+1} = \beta^2 (1 + r_{t+1})^2 c_{1t}.$$

Αντικαθιστώντας στον δια βίου εισοδηματικό περιορισμό

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + r_{t+1}} = \omega_1 + \frac{\omega_2}{1 + r_{t+1}},$$

έχουμε

$$c_{1t} + \beta^2 (1 + r_{t+1}) c_{1t} = \omega_1 + \frac{\omega_2}{1 + r_{t+1}},$$

ή

$$c_{1t} = \frac{1}{1 + \beta^2 (1 + r_{t+1})} \left(\omega_1 + \frac{\omega_2}{1 + r_{t+1}} \right) \quad (1)$$

και

$$c_{2t+1} = \frac{\beta^2 (1 + r_{t+1})^2}{1 + \beta^2 (1 + r_{t+1})} \left(\omega_1 + \frac{\omega_2}{1 + r_{t+1}} \right). \quad (2)$$

5. Για τη συνάρτηση χρησιμότητας της Άσκησης 3 να βρείτε τη συνάρτηση αποταμίευσης κάθε νέου ατόμου και τη συνολική συνάρτηση αποταμίευσης.

Απάντηση

Ο εισοδηματικός περιορισμός της πρώτης περιόδου είναι

$$s_t = \omega_1 - c_{1t}. \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση κατανάλωσης της πρώτης περιόδου που βρήκαμε στην Άσκηση 3

$$c_{1t} = \frac{1}{1+\beta} \left(\omega_1 + \frac{1}{1+r_{t+1}} \omega_2 \right),$$

έχουμε ότι

$$s_t = \frac{1}{1+\beta} \left(\beta \omega_1 - \frac{1}{1+r_{t+1}} \omega_2 \right). \quad (2)$$

Τέλος, αφού όλα τα άτομα έχουν τις ίδιες προτιμήσεις και τα ίδια αποθέματα, η συνολική συνάρτηση αποταμίευσης είναι το N -οστό πολλαπλάσιο της ατομικής συνάρτησης

$$S_t = N_t s_t = N_t \frac{1}{1+\beta} \left(\beta \omega_1 - \frac{1}{1+r_{t+1}} \omega_2 \right). \quad (3)$$

6. Για τη συνάρτηση χρησιμότητας της Άσκησης 4 να βρείτε τη συνάρτηση αποταμίευσης κάθε νέου ατόμου και τη συνολική συνάρτηση αποταμίευσης

Απάντηση

Ο εισοδηματικός περιορισμός της πρώτης περιόδου είναι

$$s_t = \omega_1 - c_{1t}.$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση κατανάλωσης της πρώτης περιόδου που βρήκαμε στην Άσκηση 4 έχουμε ότι

$$s_t = \omega_1 - \frac{1}{1+\beta^2(1+r_{t+1})} \left(\omega_1 + \frac{\omega_2}{1+r_{t+1}} \right). \quad (1)$$

Τέλος, η συνολική συνάρτηση αποταμίευσης είναι το N -στο πολλαπλάσιο της ατομικής

$$S_t = N_t s_t, \quad (2)$$

όπου s_t δίνεται από την εξίσωση (1).

7. Έστω μια οικονομία στην οποία οι προτιμήσεις περιγράφονται από τη συνάρτηση χρησιμότητας

$$u_t = c_{1t} (c_{2t+1})^\beta, \quad \beta = 1.$$

Υποθέστε επίσης ότι $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 0.5$, $N_0 = 100$ και $n = 0.05$. Προσδιορίστε το σημείο γενικής ισορροπίας στην περίπτωση μιας κλειστής οικονομίας.

Απάντηση

Για την οικονομία που εξετάζουμε η συνολική συνάρτηση αποταμίευσης είναι

$$S_t = N_t \frac{1}{1+\beta} \left(\beta \omega_1 - \frac{1}{1+r_{t+1}} \omega_2 \right). \quad (1)$$

(Βλ. εξίσωση 3 στην Άσκηση 5).

Επειδή πρόκειται για κλειστή οικονομία, στην ισορροπία $S_t = 0$. Επομένως, από την εξίσωση (1) έχουμε

$$1 + r_{t+1} = \frac{\omega_2}{\beta \omega_1} \quad \forall t,$$

ή, αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων,

$$r_{t+1} = -0.75 \quad \forall t.$$

Τέλος, η ισορροπία είναι αυτάρκης και επομένως,

$$c_{1t} = 2 \quad \text{και} \quad c_{2t+1} = 0.5 \quad \forall t.$$

(Επαληθεύστε τις τιμές για τις δύο καταναλώσεις αντικαθιστώντας την τιμή ισορροπίας του επιτοκίου, $r_{t+1} = -0.75$, στις συναρτήσεις κατανάλωσης που βρέθηκαν στην Άσκηση 3, εξισώσεις 9 και 10).

8. Να προσδιοριστεί η γενική ισορροπία σε μια οικονομία όπου η συνάρτηση χρησιμότητας όλων των ατόμων είναι

$$v_t = c_{1t}^\rho + \beta c_{2t+1}^\rho, \quad \beta = 1, \quad \rho = \frac{1}{2},$$

και τα αποθέματα όλων των ατόμων είναι $\omega_1 = 2$ και $\omega_2 = 1$. Τέλος, $N_t = 100 \quad \forall t$.

Απάντηση

Στην ισορροπία $S_t = 0$ και επειδή όλα τα άτομα έχουν τις ίδιες προτιμήσεις και τα ίδια αποθέματα $s_t = 0$. Από την Άσκηση 6 γνωρίζουμε ότι με τις συγκεκριμένες προτιμήσεις

$$s_t = \omega_1 - \frac{1}{1 + \beta^2 (1 + r_{t+1})} \left(\omega_1 + \frac{\omega_2}{1 + r_{t+1}} \right).$$

Θέτοντας $s_t = 0$ έχουμε

$$\omega_1 = \frac{1}{1 + \beta^2 (1 + r_{t+1})} \left(\omega_1 + \frac{\omega_2}{1 + r_{t+1}} \right).$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων έχουμε

$$2 = \frac{1}{2 + r_{t+1}} \left(2 + \frac{1}{1 + r_{t+1}} \right).$$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση δευτέρου βαθμού

$$2r_{t+1}^2 + 4r_{t+1} + 1 = 0$$

η οποία έχει δύο ρίζες

$$r_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad r_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Η δεύτερη ρίζα απορρίπτεται αφού είναι μικρότερη από -1 .
Επομένως,

$$r_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cong -0.293 \quad \forall t.$$

Τέλος, η ισορροπία είναι αυτάρκης και επομένως

$$c_{1t} = 2 \quad \text{και} \quad c_{2t+1} = 1 \quad \forall t.$$

(Επιβεβαιώστε την τελευταία πρόταση αντικαθιστώντας την τιμή του επιτοκίου, $r_{t+1} = -1 + \sqrt{2}/2$, στις συναρτήσεις ζήτησης για κατανάλωση που βρήκαμε στην Άσκηση 4, εξισώσεις 1 και 2).

9. Να επαναληφθεί η Άσκηση 8 όταν $\beta = 1$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 0.5$, $N_0 = 100$ και $n = 0.05$.

Απάντηση

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην Άσκηση 8 καταλήγουμε πάλι στην εξίσωση

$$\omega_1 = \frac{1}{1 + \beta^2 (1 + r_{t+1})} \left(\omega_1 + \frac{\omega_2}{1 + r_{t+1}} \right).$$

Αντικαθιστώντας τις νέες τιμές των παραμέτρων έχουμε

$$2 = \frac{1}{2r_{t+1}} \left(2 + \frac{0.5}{1 + r_{t+1}} \right).$$

Κάνοντας και πάλι πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση δευτέρου βαθμού:

$$4r_{t+1}^2 + 8r_{t+1} + 3 = 0$$

η οποία έχει δύο λύσεις

$$r_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad r_2 = -\frac{3}{2},$$

από τις οποίες απορρίπτουμε τη δεύτερη επειδή είναι μικρότερη από -1 . Επομένως,

$$r_{t+1} = -\frac{1}{2} \quad \forall t.$$

Τέλος, η ισορροπία είναι αυτάρκης και επομένως,

$$c_{1t} = 2 \quad \text{και} \quad c_{2t+1} = 1/2 \quad \forall t.$$

(Επιβεβαιώστε την τελευταία πρόταση αντικαθιστώντας στις εξισώσεις 1 και 2 της Άσκησης 4).

10. Έστω μια οικονομία με τα δεδομένα της Άσκησης 7. Στην προκειμένη όμως περίπτωση πρόκειται για μια ανοικτή οικονομία η οποία συναλλάσσεται σε ένα διεθνές επιτόκιο ίσο με τη μονάδα σε κάθε περίοδο. Να προσδιοριστεί η διαχρονική γενική ισορροπία.

Απάντηση

Όπως και στην Άσκηση 7 η ατομική συνάρτηση αποταμίευσης είναι

$$s_t = \frac{1}{1+\beta} \left(\beta\omega_1 - \frac{1}{1+r_{t+1}}\omega_2 \right). \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων έχουμε

$$s_t = 0.875 \quad \forall t.$$

Επίσης οι συναρτήσεις ζήτησης για κατανάλωση είναι

$$c_{1t} = \frac{1}{1+\beta} \frac{\omega_{t+1}}{1+r_{t+1}} \quad \text{και} \quad c_{2t+1} = \frac{\beta}{1+\beta} \omega_{t+1}, \quad \forall t,$$

όπου $\omega_{t+1} = (1+r_{t+1})\omega_1 + \omega_2$. Αντικαθιστώντας και πάλι τις τιμές των παραμέτρων $\beta, \omega_1, \omega_2$ και του επιτοκίου, r_{t+1} βρίσκουμε

$$c_{1t} = 1.125 \quad \text{και} \quad c_{2t+1} = 2.25 \quad \forall t.$$

11. Έστω μια μικρή ανοικτή οικονομία όπου οι προτιμήσεις όλων των ατόμων περιγράφονται από τη συνάρτηση

$$u_t = (c_{1t})^\rho + \beta (c_{2t+1})^\rho, \quad \beta > 0, \quad \rho = \frac{1}{2}.$$

Τα αποθέματα όλων των ατόμων είναι $\omega_1 = 2$ και $\omega_2 = 1$. Επίσης $\beta = 1$, $N_0 = 100$, $n = 0.05$ και το διεθνές επιτόκιο σε κάθε περίοδο είναι ίσο με τη μονάδα. Να προσδιοριστεί η γενική ισορροπία.

Απάντηση

Η συνάρτηση αποταμίευσης κάθε ατόμου είναι (βλ. Άσκηση 6)

$$s_t = \omega_1 - \frac{1}{1+\beta^2(1+r_{t+1})} \left(\omega_1 + \frac{\omega_2}{1+r_{t+1}} \right).$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων και του επιτοκίου έχουμε

$$s_t = 1.167 \quad \forall t.$$

Επίσης οι συναρτήσεις ζήτησης για κατανάλωση είναι

$$c_{1t} = \frac{1}{1 + \beta^2(1+r_{t+1})} \left(\omega_1 + \frac{\omega_2}{1+r_{t+1}} \right)$$

και

$$c_{2t+1} = \frac{\beta^2(1+r_{t+1})^2}{1 + \beta^2(1+r_{t+1})} \left(\omega_1 + \frac{\omega_2}{1+r_{t+1}} \right)$$

(βλ. Άσκηση 4). Αντικαθιστώντας και πάλι τις τιμές των παραμέτρων και του επιτοκίου έχουμε

$$c_{1t} = 0.833 \quad \text{και} \quad c_{2t+1} = 3.333 \quad \forall t.$$

12. Να επαναληφθεί η Άσκηση 11 με τα νέα δεδομένα: $\beta = 1$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 0.5$, $N_0 = 100$ και $n = 0.05$. Το διεθνές επιτόκιο παραμένει ίσο με 1.

Απάντηση

Αντικαθιστώντας στις συναρτήσεις κατανάλωσης της Άσκησης 4 βρίσκουμε

$$c_{1t} = 0.75 \quad \text{και} \quad c_{2t+1} = 3 \quad \forall t.$$

Προσέξτε ότι η μόνη διαφορά μεταξύ των Ασκήσεων 11 και 12 είναι ότι μειώθηκε το απόθεμα της δεύτερης περιόδου. Η μείωση αυτή του αποθέματος οδήγησε σε μείωση της κατανάλωσης και των δύο περιόδων όπως προβλέπει η θεωρία. Τέλος, η αποταμίευση μετά τη μείωση του επιτοκίου θα είναι

$$s_t = 1.25 \quad \forall t.$$