6. Το Υπόδειγμα των Επικαλυπτόμενων Γενεών: Ανταλλαγή Ι

6.1. Το Οικονομικό Περιβάλλον

Χρόνος[1]

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος είναι διακριτός και διαιρείται σε διαστήματα που ονομάζονται **περίοδοι**. Ο αριθμός των περιόδων είναι άπειρος και για την ακρίβεια είναι ίσος με τον αριθμό των στοιχείων του συνόλου των φυσικών αριθμών $\{1, 2, ...\}$.[2] Η διάρκεια κάθε χρονικής περιόδου είναι σταθερή ή, με άλλα λόγια, τα χρονικά διαστήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Ο ακριβής αριθμός των ετών που διαρκεί η κάθε περίοδος δεν έχει σημασία. Θα συμβολίζουμε το χρόνο αλλά και κάθε αντιπροσωπευτική περίοδο με το δείκτη $t \in \{1, 2, ...\}$.

Πληθυσμός

Έστω μια οικονομία στην οποία οι πολίτες ζουν για δύο περιόδους. Στην πρώτη περίοδο της ζωής τους είναι **νέοι** και στη δεύτερη **ηλικιωμένοι**. Τα άτομα τερματίζουν το βίο τους με βεβαιότητα στο τέλος της δεύτερης περιόδου από τότε που γεννήθηκαν.

---

[1] Το υπόδειγμα αναπτύχθηκε ανεξάρτητα από το Γάλλο οικονομολόγο και φυσικό Maurice Allais το 1947 (Βραβείο Nobel 1988) και τον Αμερικανό οικονομολόγο Paul Samuelson το 1958 (Βραβείο Nobel 1970), Βλ. Allais (1947) και Samuelson (1958), αντίστοιχα. Πολλά από τα θέματα που αναπτύσσονται στο υπόλοιπο του βιβλίου καλύπτονται σε ένα πιο προχωρημένο επίπεδο στα βιβλία των Azariadis (1993) και de la Croix and Michel (2002).

[2] Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, ένας από τους πέντε λόγους για τους οποίους οι άνθρωποι πρέπει να πιστέψουν στην έννοια του απείρου είναι, ο αναμφισβήτητος για αυτόν ισχυρισμός, ότι ο χρόνος είναι άπειρος (Βλ., μεταξύ άλλων Clegg 2003, σελ. 29-32).

Η εξέταση της οικονομίας αρχίζει την περίοδο $t = 1$. Κάθε περίοδο εμφανίζεται (γεννιέται) μια νέα **γενεά** η οποία συμβολίζεται με την ημερομηνία γέννησής της.[3] Έτσι αναφερόμενοι στη γενεά 1 εννοούμε τη γενεά που γεννήθηκε (εμφανίστηκε) την περίοδο 1 και πέθανε στο τέλος της περιόδου 2. Ειδικά για την περίοδο 1 υπάρχουν επίσης $N_0 > 0$ άτομα τα οποία είναι αρχικά ηλικιωμένοι και στους οποίους αναφερόμαστε ως η **αρχική γενεά**.[4]

Η δημογραφική σύνθεση της οικονομίας απεικονίζεται στο Σχήμα 6.1. Στη διάρκεια του βίου της η κάθε γενεά (πλην της αρχικής) έρχεται σε επαφή μόνο με 2 άλλες γενεές. Τη μία περίοδο έρχεται σε επαφή (συνυπάρχει) με την προηγούμενη γενεά και την επόμενη περίοδο συνυπάρχει με την επόμενη γενεά.[5]

Ο πληθυσμός κάθε γενεάς μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό *n*. Επομένως, κάθε περίοδο αντιστοιχούν 1+*n* νέα άτομα σε κάθε ηλικιωμένο. Την περίοδο *t*, όπου $t = 1, 2, \ldots$, θα γεννηθούν $N_t = N_0(1+n)^t$ νέα άτομα. Ο συνολικός πληθυσμός όμως της οικονομίας την ίδια περίοδο *t* αποτελείται από το άθροισμα των μελών δύο συνυπαρχόντων γενεών (των νέων και των ηλικιωμένων κάθε περιόδου) και είναι ίσος με $N_{t-1} + N_t$, όπου $t = 1, 2, \ldots$. Ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού πληθυσμού είναι επίσης *n*:

[3] Αναφερόμενοι σε μια νέα γενεά χρησιμοποιούμε τους όρους «εμφανίζεται» και «γεννιέται» με την ίδια σημασία. Ο λόγος είναι ότι δεν μας ενδιαφέρει η περίοδος της φυσικής γέννησης μιας γενεάς αλλά η εμφάνισή της στην οικονομία, δηλαδή η περίοδος στην οποία τα άτομα αρχίζουν να λαμβάνουν οικονομικές αποφάσεις. Με άλλα λόγια, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι τα άτομα ζουν τρεις περιόδους, την πρώτη είναι παιδιά και δεν λαμβάνουν οικονομικές αποφάσεις (ζουν σε βάρος των γονιών τους), τη δεύτερη είναι νέοι και την τρίτη είναι ηλικιωμένοι. Είναι προφανές ότι μια τέτοια περιπλοκή του μοντέλου είναι περιττή.

[4] Τα άτομα αυτά γεννήθηκαν την προηγούμενη περίοδο (περίοδο 0) την οποία δεν εξετάζουμε, αφού η πρώτη περίοδος της ανάλυσης είναι η περίοδος 1. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό η παρουσία αυτής της γενεάς δημιουργεί ιδιαιτερότητες. Για παράδειγμα, τα άτομα αυτά δεν ενδιαφέρονται για οποιεσδήποτε πολιτικές εφαρμοστούν στο μέλλον, αφού διανύουν την τελευταία περίοδο της ζωής τους. Παρόλα αυτά η παρουσία τους στο υπόδειγμα κρίνεται σκόπιμη αφού μας επιτρέπει να λάβουμε υπόψη τα αποτελέσματα οποιασδήποτε πολιτικής πάνω στην τρέχουσα γενεά ηλικιωμένων.

[5] Από το Σχήμα 6.1 είναι προφανής η προέλευση του ονόματος «υπόδειγμα των επικαλυπτόμενων γενεών», που είναι μετάφραση του αγγλικού όρου overlapping generations model. Σε κάθε περίοδο δύο γενεές επικαλύπτονται, δηλαδή συμπίπτουν μερικώς η μία με την άλλη ως προς το χρόνο.

Γενεά	Χρονική Περίοδος				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
0	Η				
1	Ν	Η			
2		Ν	Η		
3			Ν	Η	
4				Ν	Η
5					Ν

Σημειώσεις: Η = ηλικιωμένοι, Ν = νέοι

Σχήμα 6.1. Σε κάθε περίοδο συνυπάρχουν 2 γενεές.

$$\text{ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού} = \frac{(N_t + N_{t-1}) - (N_{t-1} + N_{t-2})}{N_{t-1} + N_{t-2}}$$

$$= \frac{N_t - N_{t-2}}{N_{t-1} + N_{t-2}}$$

$$= \frac{(1+n)^2 N_{t-2} - N_{t-2}}{(1+n)N_{t-2} + N_{t-2}} = n.$$

Παράδειγμα 6.1. Έστω N_0=100 και n=2%. Ποιος είναι ο αριθμός των νέων και των ηλικιωμένων ατόμων την πρώτη και τη δεύτερη περίοδο; Ποιος είναι ο συνολικός πληθυσμός της οικονομίας την πρώτη και τη δεύτερη περίοδο και ποιος ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού πληθυσμού;

Προφανώς ο αριθμός των ηλικιωμένων ατόμων την περίοδο 1 είναι 100. Την ίδια περίοδο θα γεννηθούν $(1+0.02)\times 100 = 102$ νέα άτομα και ο συνολικός πληθυσμός θα είναι 202 άτομα. Την περίοδο 2 θα υπάρχουν $(1+0.02)\times 102 =$ $(1+0.02)^2 \times 100 = 104.04$ νέα άτομα και 102 ηλικιωμένα (αγνοούμε το γεγονός ότι ο πληθυσμός πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός). Επομένως, ο συνολικός πληθυσμός της οικονομίας την περίοδο 2 θα είναι 206.04. Τέλος, ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού πληθυσμού μεταξύ της περιόδου 1 και 2 είναι $(206.04-202)/202 = 2\%$. ■

Άσκηση 6.1. Υποθέστε μια οικονομία όπως αυτή του Παραδείγματος 6.1. Υπολογίστε τον αριθμό των νέων ατόμων, τον αριθμό των ηλικιωμένων ατόμων, καθώς επίσης και το συνολικό πληθυσμό την τέταρτη περίοδο (δηλαδή για $t = 4$).

Αγαθά

Για λόγους απλούστευσης του υποδείγματος υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μόνο καταναλωτικό αγαθό στην οικονομία στο οποίο αναφερόμαστε με τον όρο κατανάλωση και το συμβολίζουμε με το γράμμα c. Η κατανάλωση όμως του αγαθού εκτός από την ποσοτική διάσταση (πόσες μονάδες καταναλώνονται) έχει και τη διάσταση του χρόνου (πότε καταναλώνεται). Συμβολίζουμε λοιπόν ως c_{1t} την κατανάλωση την περίοδο t των ατόμων που είναι νέοι αυτή την περίοδο, δηλαδή την κατανάλωση της γενεάς t την περίοδο t. Επίσης συμβολίζουμε με c_{2t} την κατανάλωση την περίοδο t των ατόμων που είναι ηλικιωμένοι αυτή την περίοδο. Πρόκειται δηλαδή για την κατανάλωση των ατόμων που την περίοδο t διανύουν τη δεύτερη και τελευταία περίοδο της ζωή τους (γενεά t-1). Γενικά η κατανάλωση (c_{it}) έχει δύο δείκτες. Ο πρώτος δείκτης $i=1,2$ υποδηλώνει αν οι καταναλωτές είναι νέοι ή ηλικιωμένοι ή, με άλλα λόγια, αν βρίσκονται στην πρώτη ή στη δεύτερη περίοδο της ζωής τους. Ο δεύτερος δείκτης $t = 1, 2, 3, \ldots$ υποδηλώνει τη χρονική περίοδο στην οποία γίνεται η κατανάλωση. Έτσι οι όροι c_{1t} και c_{2t} συμβολίζουν την κατανάλωση διαφορετικών ατόμων την ίδια χρονική περίοδο (το ποσό που καταναλώνουν οι γενεές *t* και *t*-1, αντίστοιχα, την περίοδο *t*) ενώ οι όροι c_{1t} και c_{2t+1} συμβολίζουν την κατανάλωση των ίδιων ατόμων σε διαφορετικές χρονικές περιόδους (κατανάλωση της γενεάς *t* τις περιόδους *t* και *t* + 1 αντίστοιχα).

Αρχικά Αποθέματα και Τεχνολογία

Υποθέτουμε προς το παρόν ότι στην οικονομία δεν υπάρχει παραγωγή.[6] Τα άτομα λαμβάνουν **αποθέματα** του συνολικού καταναλωτικού αγαθού στην αρχή κάθε περιόδου. Συγκεκριμένα όλα τα άτομα λαμβάνουν $\omega_1 > 0$ μονάδες του αγαθού στην αρχή της πρώτης περιόδου και $\omega_2 \geq 0$ μονάδες στην αρχή της δεύτερης περιόδου του βίου τους. Η μορφή αυτού του αποθέματος συμβολίζεται ως (ω_1, ω_2). Η έμφαση του μοντέλου αυτού είναι στην αποταμίευση «για τα γεράματα». Επομένως, για λόγους απλοποίησης και χωρίς καμία ουσιαστική απώλεια της γενικότητας, συχνά υποθέτουμε ότι $\omega_2 = 0$, δηλαδή τα άτομα δεν λαμβάνουν καμία μονάδα του αγαθού τη δεύτερη περίοδο της ζωής τους. Επίσης υποθέτουμε ότι η διαθέσιμη τεχνολογία είναι τέτοια ώστε η αποθήκευση μονάδων του καταναλωτικού αγαθού δεν είναι δυνατή.[7]

Το Σχήμα 6.2 παρουσιάζει τον πληθυσμό κάθε γενεάς, το απόθεμα που έχει στην αρχή κάθε περιόδου και την κατανάλωση που θα έχει κατά τη διάρκεια της περιόδου. Για παράδειγμα, η γενεά 3, η οποία είναι εν ζωή τις περιόδους 3 και 4, έχει $N_0(1+n)^3$ μέλη. Την περίοδο 3 το απόθεμα που λαμβάνει κάθε ένα από τα μέλη της είναι ω_1 και η κατανάλωσή του αυτή την περίοδο συμβολίζεται με c_{13}.

[6] Η δυνατότητα παραγωγής με τη χρήση εισροών εξετάζεται σε επόμενο κεφάλαιο.

[7] Η δυνατότητα αποθήκευσης εξετάζεται επίσης σε επόμενο κεφαλαίο.

Γενεά	**Χρονική Περίοδος**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
0 N_0	H ω_2, c_{21}				
1 $N_1=$ $N_0(1+n)$	N ω_1, c_{11}	H ω_2, c_{22}			
2 $N_2=$ $N_0(1+n)^2$		N ω_1, c_{12}	H ω_2, c_{23}		
3 $N_3=$ $N_0(1+n)^3$			N ω_1, c_{13}	H ω_2, c_{24}	
4 $N_4=$ $N_0(1+n)^4$				N ω_1, c_{14}	H ω_2, c_{25}
5					N

Σημειώσεις: N = νέοι, H = ηλικιωμένοι

Σχήμα 6.2. Πλήθος ατόμων, απόθεμα και κατανάλωση κάθε γενεάς

Η ίδια γενεά την περίοδο 4 έχει τα ίδια μέλη, κάθε μέλος έχει απόθεμα ω_2 και η κατανάλωσή του συμβολίζεται με c_{24}. Στο τέλος της περιόδου 4 όλα τα μέλη αυτής της γενεάς πεθαίνουν.

Προτιμήσεις

Υποθέτουμε για λόγους απλούστευσης ότι όλα τα άτομα έχουν τις ίδιες προτιμήσεις οι οποίες είναι κυρτές. Οι προτιμήσεις αυτές περιγράφονται από μία συνάρτηση χρησιμότητας η οποία εξαρτάται από την κατανάλωση του ατόμου την πρώτη και τη δεύτερη περίοδο: $u = u(c_{1t}, c_{2t+1})$. Η συνάρτηση αυτή έχει τις ιδιότητες που υποθέσαμε για τις συναρτήσεις χρησιμότητας στο στατικό υπόδειγμα γενικής ισορροπίας του Κεφαλαίου1: τουλάχιστον δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη, αυστηρά αύξουσα και οιονεί κοίλη. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, πρακτικά αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση των δύο αγαθών, που έχουμε εδώ, οι καμπύλες αδιαφορίας που προκύπτουν από μια τέτοια συνάρτηση χρησιμότητας έχουν αρνητική κλίση, καλύπτουν το επίπεδο, είναι κυρτές προς την αρχή των αξόνων και δεν τέμνονται. Επιπλέον, το επίπεδο χρησιμότητας που επιτυγχάνει ο καταναλωτής αυξάνεται αν ξεκινώντας από ένα ορισμένο συνδυασμό (c_1, c_2) κινηθούμε προς τα πάνω και δεξιά, δηλαδή βορειοανατολικά, στο χάρτη των καμπυλών αδιαφορίας (βλ. Σχήμα 6.3). Υπενθυμίζεται ότι η απόλυτη τιμή της κλίσης μιας καμπύλης αδιαφορίας είναι γνωστή ως οριακός λόγος υποκατάστασης (ΟΛΥ) και ότι ο λόγος αυτός μειώνεται κατά μήκος μιας καμπύλης αδιαφορίας (το γεγονός αυτό είναι απόρροια της υποθέσεως ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι οιονεί κοίλη ή ισοδύναμα ότι οι καμπύλες αδιαφορίας είναι κυρτές).

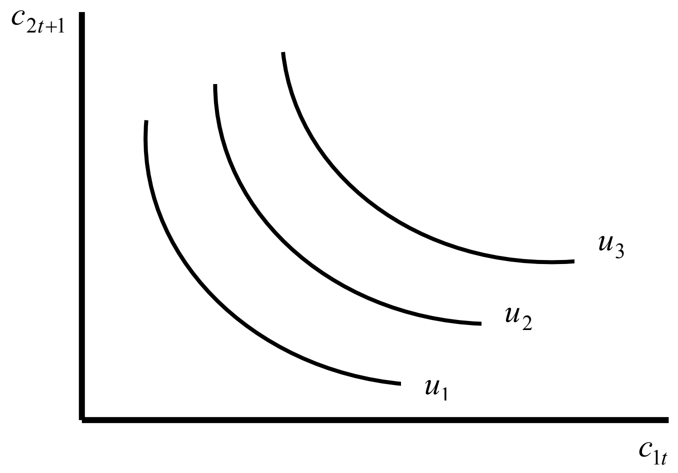
Παράδειγμα 6.2. Παραδείγματα συναρτήσεων χρησιμότητας που θα χρησιμοποιήσουμε συχνά είναι τα εξής:

$$u_t = c_{1t}(c_{2t+1})^{\beta}, \text{ όπου } \beta > 0 \qquad \text{(U1)}$$

$$v_t = (c_{1t})^{\nu} + \beta(c_{2t+1})^{\nu}, \text{ όπου } \beta > 0, \text{ και } \nu \in (0,1) \qquad \text{(U2)}$$

καθώς επίσης και **θετικά μονότονους μετασχηματισμούς** αυτών των συναρτήσεων.[8]

[8] Βλ. Κεφάλαιο 4.



Σχήμα 6.3. Χάρτης καμπυλών αδιαφορίας: $u_3 > u_2 > u_1$, όπου u_i δηλώνει το επίπεδο χρησιμότητας της αντίστοιχης καμπύλης.

Άσκηση 6.2. Επιβεβαιώστε ότι με τους δεδομένους περιορισμούς στις παραμέτρους β και ρ οι συναρτήσεις χρησιμότητας (U1) και (U2) είναι αποδεκτές ως συναρτήσεις χρησιμότητας.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι οι συναρτήσεις είναι αύξουσες (δηλαδή έχουν θετικές οριακές χρησιμότητες) και οιονεί κοίλες (δηλαδή οι καμπύλες αδιαφορίας είναι κυρτές).

Η πλέον συνήθης μορφή συνάρτησης χρησιμότητας σε διαχρονικά προβλήματα είναι:[9]

$$U_t = u_1(c_{1t}) + \beta\, u_2(c_{2t+1}), \tag{U3}$$

[9] Προσέξτε ότι στην περίπτωση που οι συναρτήσεις χρησιμότητας κάθε περιόδου $u_1 = u_2 = \ln(c)$, τότε U = ln(u), όπου η u δίνεται από την (U1). Επομένως η U αποτελεί ένα θετικά μονότονο μετασχηματισμό της u.

όπου β είναι ο συντελεστής προεξόφλησης (discount factor) και δείχνει την προτίμηση στην μελλοντική κατανάλωση που έχει το άτομο. Επίσης οι συναρτήσεις u_1 και u_2 είναι αυστηρά αύξουσες και κοίλες. Ο συντελεστής β γράφεται συχνά ως

$$\beta = \frac{1}{1+\rho}$$

και το ρ καλείται ποσοστό προεξόφλησης (discount rate). Σε αυτό και στα επόμενα κεφάλαια, θα υποθέσουμε ότι $\beta > 0$ ($\rho > -1$) και επομένως ότι ο καταναλωτής θέτει θετικό συντελεστή στη μελλοντική χρησιμότητά του (μια αύξηση στη μελλοντική κατανάλωση αυξάνει τη συνολική χρησιμότητά του). Αν $\beta < 1$ ($\rho > 0$) ο καταναλωτής δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στην παρούσα χρησιμότητα από ότι στην μελλοντική. Το αντίθετο συμβαίνει όταν $\beta > 1$ ($\rho < 0$). Η συνηθισμένη περίπτωση στη βιβλιογραφία είναι η πρώτη ($\beta < 1$).

6.2. Το Οικονομικό Πρόβλημα κάθε Γενεάς

Ο Εισοδηματικός Περιορισμός

Το πρόβλημα κάθε ατόμου που ανήκει σε οποιαδήποτε γενεά πλην της αρχικής είναι η μεγιστοποίηση της χρησιμότητάς του υπό τον εισοδηματικό του περιορισμό. Ο τελευταίος κατασκευάζεται ως εξής. Ας συμβολίσουμε με s τις μονάδες του αγαθού που δεν καταναλώνει ο καταναλωτής. Τότε την πρώτη περίοδο το κάθε άτομο λειτουργεί υπό τον περιορισμό

$$c_{1t} + s_t = \omega_1 \tag{6.1}$$

Υπάρχουν δύο τρόποι για να διαθέσει κανείς το εισόδημα του: να το καταναλώσει ή να το αποταμιεύσει. Επομένως, το άθροισμα της κατανάλωσης και της αποταμίευσης κάθε περιόδου πρέπει να ισούται με το εισόδημα του καταναλωτή την ίδια περίοδο. Το εισόδημα του καταναλωτή την πρώτη περίοδο είναι ίσο με το αρχικό απόθεμα και έτσι προκύπτει ο περιορισμός (6.1).[10] Τη δεύτερη περίοδο ο εισοδηματικός περιορισμός είναι

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + \omega_2 \tag{6.2}$$

όπου r είναι το επιτόκιο δανεισμού.[11] Σύμφωνα με τον περιορισμό (6.2) η κατανάλωση τη δεύτερη περίοδο είναι ίση με το εισόδημα του καταναλωτή την ίδια περίοδο (τη δεύτερη περίοδο δεν έχει νόημα να αποταμιεύσει κανείς αφού γνωρίζει ότι είναι η τελευταία περίοδος του βίου του). Το εισόδημα του καταναλωτή τη δεύτερη περίοδο αποτελείται από το απόθεμα που έλαβε στην αρχή της περιόδου συν το ποσό που αποταμίευσε την προηγούμενη περίοδο s_t συν τους τόκους $r_{t+1}s_t$.

Αν συνδυάσουμε τους δύο περιορισμούς (6.1) και (6.2), εξαλείφοντας το s_t, τότε παίρνουμε το δια βίου εισοδηματικό περιορισμό κάθε ατόμου:

$$c_{1t} + \frac{1}{1 + r_{t+1}} c_{2t+1} = \omega_1 + \frac{1}{1 + r_{t+1}} \omega_2 \tag{6.3}$$

Περιορισμούς σαν τον (6.3) τους συναντάμε πολύ συχνά σε διαχρονικά προβλήματα. Η ερμηνεία του είναι απλή: αφού το άτομο δεν αφήνει κληρονομιά στους απογόνους του, θα πρέπει η παρούσα

---

[10] Περιορισμοί όπως αυτός που δίνεται από την (6.1) εμφανίζονται συχνά με ανισότητα, δηλαδή

$$c_{1t} + s_t \leq \omega.$$

Η υπόθεση όμως ότι δεν υπάρχει σημείο κορεσμού (αφού οι καμπύλες αδιαφορίας έχουν αρνητική κλίση) σημαίνει ότι ο καταναλωτής δεν θα πετάξει καμία μονάδα και επομένως η περίπτωση να ισχύει ο περιορισμός αυστηρά ως ανισότητα αποκλείεται. Ανάλογες περιπτώσεις είδαμε και στην Ενότητα 1, βλ. για παράδειγμα την εξίσωση 1.2.

[11] Η αποταμίευση της περιόδου t πολλαπλασιάζεται με το επιτόκιο δανεισμού της επόμενης περιόδου (r_{t+1}), οπότε και εξοφλείται το δάνειο. Ορισμένοι συγγραφείς χρησιμοποιούν r_t στη θέση του r_{t+1}, υποθέτοντας ότι το επιτόκιο δανεισμού συμφωνείται όταν συνάπτεται το δάνειο. Για τους δικούς μας σκοπούς οι προκύπτουσες διαφορές είναι αμελητέες.

αξία της κατανάλωσής του (αριστερό μέλος) να είναι ίση με την παρούσα αξία του συνολικού εισοδήματός του (δεξιό μέλος).[12]

Μπορούμε επίσης να γράψουμε τον εισοδηματικό περιορισμό με τη μορφή της μελλοντικής αντί της παρούσας αξίας:

$$(1+r_{t+1})c_{1t} + c_{2t+1} = (1+r_{t+1})\omega_1 + \omega_2 \qquad (6.3')$$

Μεγιστοποίηση της Συνάρτησης Χρησιμότητας

Η επιλογή που καλείται να κάνει κάθε άτομο μπορεί να παρασταθεί ως η λύση του προβλήματος:[13]

Να μεγιστοποιηθεί ως προς c_{1t} και c_{2t+1} η συνάρτηση:

$$u_t = u(c_{1t}, c_{2t+1}) \qquad (\Pi 6.1)$$

Υπό τον περιορισμό: $c_{1t} + \dfrac{1}{1+r_{t+1}} c_{2t+1} = \omega_1 + \dfrac{1}{1+r_{t+1}} \omega_2$.

Το διαχρονικό πρόβλημα του καταναλωτή που αντιμετωπίζουμε εδώ είναι ουσιαστικά το ίδιο με το στατικό πρόβλημα ενός ατόμου που διαλέγει τις ποσότητες δύο αγαθών υπό ένα εισοδηματικό περιορισμό, λαμβάνοντας τις τιμές των δύο αγαθών p_1 και p_2 ως δεδομένες (βλ. Κεφάλαιο 1). Στο στατικό πρόβλημα η συνάρτηση χρησιμότητας περιγράφει τις προτιμήσεις του ατόμου ως προς τα δύο αγαθά ενώ στο διαχρονικό πρόβλημα η συνάρτηση χρησιμότητας περιγράφει τις προτιμήσεις του ατόμου ως προς την κατανάλωση ενός αγαθού σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Στο στατικό πρόβλημα οι τιμές των αγαθών είναι p_1 και p_2 ενώ στο διαχρονικό πρόβλημα οι τιμές των δύο αγαθών μπορούν να συμβολισθούν με p_t και p_{t+1}. Στο στατικό υπόδειγμα η σχετική τιμή του αγαθού 2 είναι p_2/p_1 ενώ στο διαχρονικό πρόβλημα η σχετική τιμή της κατανάλωσης τη δεύτερη περίοδο είναι $p_{t+1}/p_t = 1/(1+r_{t+1})$. Ο όρος $1/(1+r_{t+1})$ είναι η τιμή (ή το κόστος) της κατανάλωσης τη δεύτερη περίοδο (σε όρους της

[12] Εάν υπήρχε κάποιο κληροδότημα θα έπρεπε να αφαιρέσουμε την παρούσα αξία του από το δεξιό μέλος της εξίσωσης (6.3).

[13] Ως συνήθως, σε κάθε τέτοιο πρόβλημα μεγιστοποίησης θεωρούμε παρόντες και δύο ακόμη περιορισμούς: $c_{1t} \geq 0$ και $c_{2t+1} \geq 0$, τους οποίους όμως δεν αναφέρουμε ρητά για να διατηρηθεί η απλότητα της παρουσίασης.

κατανάλωσης την πρώτη περίοδο), αφού ο καταναλωτής πρέπει να θυσιάσει (αποταμιεύσει) $1/(1+r_{t+1})$ μονάδα κατανάλωσης την πρώτη περίοδο για να μπορέσει να καταναλώσει 1 μονάδα κατανάλωσης τη δεύτερη. Πράγματι αν το άτομο αποταμιεύσει $1/(1+r_{t+1})$ τότε θα λάβει την επόμενη περίοδο $[1/(1+r_{t+1})](1+r_{t+1})=1$ (Μια πιο τεχνική παρουσίαση της σχέσης μεταξύ σχετικής τιμής και επιτοκίου δίνεται στο Παράρτημα του Κεφαλαίου).

Ας σημειωθεί ότι ο περιορισμός του προβλήματος μεγιστοποίησης μπορεί να γραφεί και με τη μορφή $(6.3')$. Σε αυτή την περίπτωση η τιμή τυποποίησης είναι η τιμή της κατανάλωσης της δεύτερης περιόδου και η τιμή της κατανάλωσης της πρώτης περιόδου (σε όρους της δεύτερης) είναι $p_t/p_{t+1}=1+r_{t+1}$. Τέλος, στην υπόθεση του στατικού προβλήματος ότι ο καταναλωτής λαμβάνει τις τιμές των αγαθών ως δεδομένες αντιστοιχεί η υπόθεση που γίνεται στην προκειμένη περίπτωση ότι ο καταναλωτής λαμβάνει το επιτόκιο *r* ως δεδομένο.

Για τη λύση του προβλήματος (Π6.1) σχηματίζουμε τη συνάρτηση του Lagrange[14]

$$L = u(c_{1t}, c_{2t+1}) + \lambda\left(\omega_1 + \frac{1}{1+r_{t+1}}\omega_2 - c_{1t} - \frac{1}{1+r_{t+1}}c_{2t+1}\right),$$

όπου λ δηλώνει τον πολλαπλασιαστή του Lagrange. Οι αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο είναι

$$\frac{\partial L}{\partial c_{1t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u(c_{1t}, c_{2t+1})}{\partial c_{1t}} = \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{2t+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u(c_{1t}, c_{2t+1})}{\partial c_{2t+1}} = \lambda\frac{1}{1+r_{t+1}},$$

[14] Αντί του περιορισμού (6.3), η μεγιστοποίηση μπορεί να γίνει υπό τον περιορισμό (6.3΄), ή ακόμη και με τους δύο περιορισμούς (6.1) και (6.2). Σε όλες τις περιπτώσεις το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο.

και ο εισοδηματικός περιορισμός. Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\frac{\dfrac{\partial u_t}{\partial c_{1t}}}{\dfrac{\partial u_t}{\partial c_{2t+1}}} = 1 + r_{t+1}. \qquad (6.4)$$

Η εξίσωση (6.4) και ο εισοδηματικός περιορισμός (6.3) συνιστούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων ως προς δύο αγνώστους: c_{1t}, c_{2t+1}. Από τη λύση αυτού του συστήματος θα προκύψουν οι συναρτήσεις ζήτησης για κατανάλωση σε κάθε περίοδο..

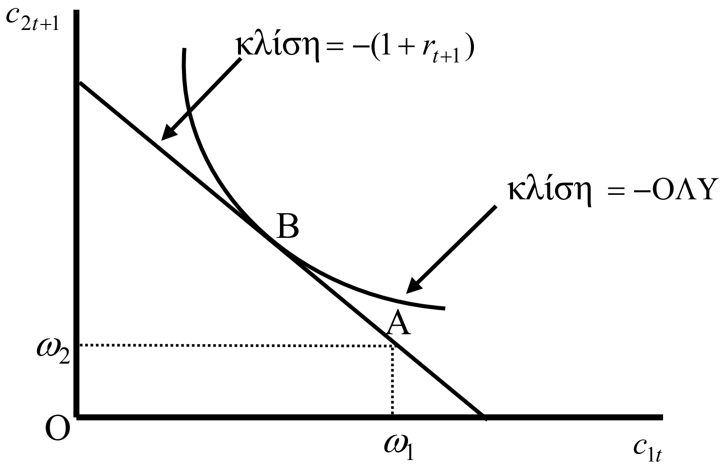
Όπως και στο στατικό πρόβλημα, η ζήτηση για κάθε ένα από τα δύο αγαθά θα είναι συνάρτηση του εισοδήματος, που στην προκειμένη περίπτωση είναι τα αποθέματα (ω_1, ω_2), και της σχετικής τιμής, δηλαδή $[1/(1+r_{t+1})]$. Επομένως θα έχουμε $c_{1t} = \chi(r_{t+1}, \omega_1, \omega_2)$ και $c_{2t+1} = \psi(r_{t+1}, \omega_1, \omega_2)$. Διαγραμματικά η λύση του προβλήματος (Π6.1) απεικονίζεται στο Σχήμα 6.4.

Η μορφή του αποθέματος του καταναλωτή τον τοποθετεί στο σημείο Α (αρχικό σημείο). Η μεγιστοποίηση της χρησιμότητάς του όμως επιτυγχάνεται στο σημείο Β όπου ισχύει η γνωστή συνθήκη σύμφωνα με την οποία ο οριακός λόγος υποκατάστασης ισούται με το λόγο των τιμών:

$$\text{ΟΛΥ} = \frac{\tau\iota\mu\acute{\eta}(c_{1t})}{\tau\iota\mu\acute{\eta}(c_{2t+1})} = \frac{1}{\dfrac{1}{1+r_{t+1}}} = 1 + r_{t+1}$$

όπου

$$\text{ΟΛΥ} = \frac{\dfrac{\partial u_t}{\partial c_{1t}}}{\dfrac{\partial u_t}{\partial c_{2t+1}}} = \text{απόλυτη τιμή της κλίσης μιας καμπύλης αδιαφορίας.}$$



Σχήμα 6.4. Μεγιστοποίηση της χρησιμότητας. Το αρχικό απόθεμα βρίσκεται στο σημείο Α. Ο καταναλωτής προτιμά να εξομαλύνει την κατανάλωσή του διαχρονικά και επιλέγει το σημείο Β.

Όπως αναφέραμε παραπάνω οι συναρτήσεις ζήτησης για κατανάλωση σε κάθε περίοδο είναι

$$c_{1t} = \chi(\underset{?}{r_{t+1}}, \underset{+}{\omega_1}, \underset{+}{\omega_2}) \quad \text{και} \quad c_{2t+1} = \psi(\underset{+}{r_{t+1}}, \underset{+}{\omega_1}, \underset{+}{\omega_2}) \tag{6.5}$$

Η εξήγηση των προσήμων που εμφανίζονται κάτω από κάθε όρο είναι η εξής. Καταρχήν υποθέτουμε ότι και οι δύο συναρτήσεις κατανάλωσης εξαρτώνται θετικά από τα αποθέματα. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι η κατανάλωση και τις δύο περιόδους είναι κανονικό αγαθό.

Σε ότι αφορά το αποτέλεσμα μιας μεταβολής του r_{t+1} εξετάζουμε τη συνηθισμένη περίπτωση (που είναι και αυτή στην οποία θέλει να δώσει έμφαση αυτό το υπόδειγμα) όπου το άτομο είναι δανειστής την πρώτη περίοδο (παρόλα αυτά η περίπτωση που είναι χρεώστης εξετάζεται με τον ίδιο τρόπο και καλούμε τον αναγνώστη να την εξετάσει). Η ανάλυση είναι ευκολότερη αν χρησιμοποιήσουμε τον εισοδηματικό περιορισμό σε μελλοντικές αξίες αντί του περιορισμού σε παρούσες αξίες.

Καταρχήν μια αύξηση του r_{t+1} θα επιφέρει μια αύξηση της σχετικής τιμής της πρώτης περιόδου.[15] Επομένως, ο καταναλωτής θα τείνει να καταναλώσει λιγότερο την πρώτη περίοδο και περισσότερο τη δεύτερη. Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως **αποτέλεσμα υποκατάστασης** και είναι πάντα αρνητικό, λειτουργεί δηλαδή αντίθετα από την κατεύθυνση της τιμής. Αν η τιμή αυξάνεται, το αποτέλεσμα υποκατάστασης τείνει να μειώσει τη ζητούμενη ποσότητα.

Εκτός όμως από το αποτέλεσμα υποκατάστασης θα υπάρξει και ένα **αποτέλεσμα εισοδήματος** πάνω στα c_{1t} και c_{2t+1}. Αν ο καταναλωτής είναι δανειστής τότε με την αύξηση του r_{t+1} θα λάβει ψηλότερο τόκο τη δεύτερη περίοδο, γεγονός που θα τον ωθήσει να καταναλώσει περισσότερο και τις δύο περιόδους (θυμηθείτε ότι εξ υποθέσεως τόσο η c_{1t} όσο και η c_{2t+1} είναι κανονικά αγαθά).[16]

Τελικά, για έναν δανειστή μια αύξηση του r_{t+1} *θα* έχει δύο αντίθετα αποτελέσματα πάνω στην κατανάλωση της πρώτης περιόδου. Το αποτέλεσμα υποκατάστασης τείνει να τη μειώσει, ενώ το αποτέλεσμα εισοδήματος να την αυξήσει, με αποτέλεσμα η κατεύθυνση της μεταβολής να είναι αβέβαιη. Αντίθετα, και τα δύο αποτελέσματα τείνουν να αυξήσουν την κατανάλωση της δεύτερης περιόδου.

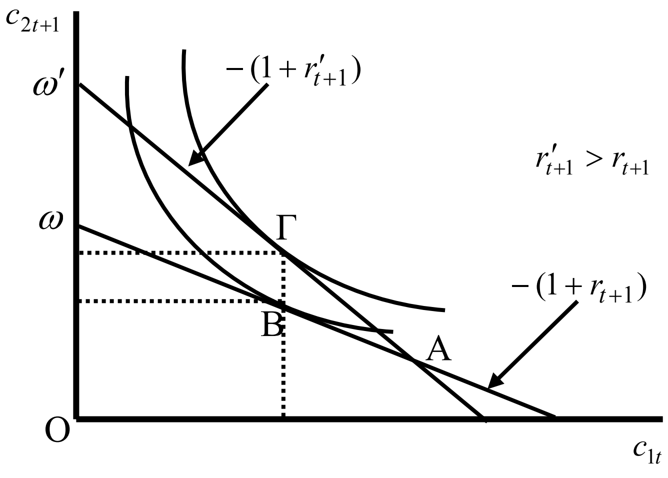
Η διαγραμματική παρουσίαση μιας από τις πιθανές περιπτώσεις δίνεται στο Σχήμα 6.5. Το σημείο Α δηλώνει το αρχικό απόθεμα του καταναλωτή. Ο εισοδηματικός περιορισμός είναι αρχικά η ευθεία γραμμή με κλίση $-(1+r_{t+1})$. Το σημείο που ο εισοδηματικός περιορισμός τέμνει τον κάθετο άξονα είναι η μελλοντική αξία του συνολικού αποθέματος $\omega_{t+1}=(1+r_{t+1})\,\omega_1+\omega_2$ ενώ το σημείο που

[15] Υπενθυμίζεται ότι η σχετική τιμή της κατανάλωσης την πρώτη περίοδο είναι $1+r_{t+1}$.

[16] Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το εισοδηματικό αποτέλεσμα εδώ διαφέρει από το κοινό εισοδηματικό αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα, το συνολικό εισοδηματικό αποτέλεσμα αποτελείται από δύο όρους: το κοινό εισοδηματικό (όταν αυξάνεται μια τιμή μειώνεται η αγοραστική δύναμη του καταναλωτή) και το εισοδηματικό αποτέλεσμα αποθέματος (όταν αυξάνεται το *r*, αυξάνεται η αξία του συνολικού αποθέματος του καταναλωτή, $(1+r)\omega_1+\omega_2$). Το πρόσημο του συνολικού αποτελέσματος εξαρτάται από το αν ο καταναλωτής είναι πιστωτής ή χρεώστης.

τέμνει τον οριζόντιο άξονα είναι η παρούσα αξία του ίδιου του αποθέματος $\omega_1 + \omega_2/(1+r_{t+1})$.

Με το επιτόκιο της αγοράς ίσο με r_{t+1}, ο καταναλωτής ισορροπεί στο σημείο Β. Προσέξτε ότι στο σημείο αυτό είναι πιστωτής (δανειστής) την πρώτη περίοδο. Στη συνέχεια θεωρήστε μια αύξηση του επιτοκίου από r_{t+1} σε r'_{t+1}, όπου $r'_{t+1} > r_{t+1}$. Ο εισοδηματικός περιορισμός περιστρέφεται δεξιόστροφα γύρω από το σημείο Α, αφού στο ψηλότερο επιτόκιο η μελλοντική αξία του αρχικού αποθέματος $\omega'_{t+1} = (1+r'_{t+1})\,\omega_1 + \omega_2 > \omega_{t+1} = (1+r_{t+1})\,\omega_1 + \omega_2$ αυξάνεται ενώ η παρούσα αξία του μειώνεται $\omega_1 + \omega_2/(1+r'_{t+1}) < \omega_1 + \omega_2/(1+r_{t+1})$. Επίσης το αρχικό απόθεμα (σημείο Α) βρίσκεται και στους δύο εισοδηματικούς περιορισμούς, αφού ο καταναλωτής μπορεί να καταναλώσει και στις δύο περιπτώσεις αυτό το συνδυασμό. Με άλλα λόγια, ο συνδυασμός που δίνεται από το αρχικό απόθεμα θα βρίσκεται πάντα πάνω στον εισοδηματικό περιορισμό, ανεξαρτήτως της τιμής του επιτοκίου.

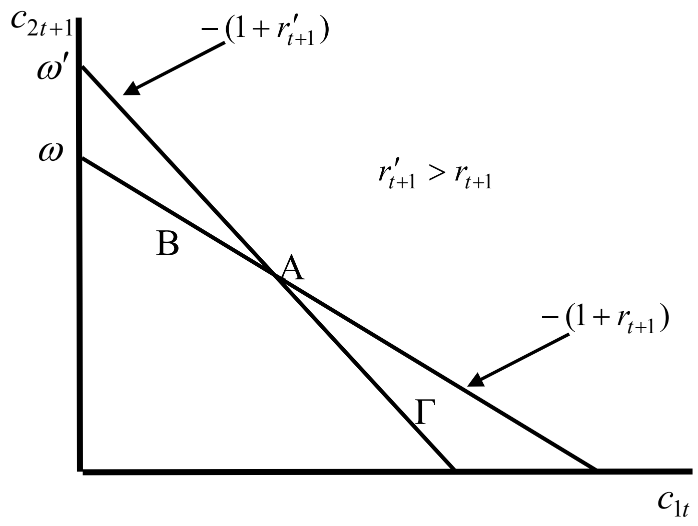


Σχήμα 6.5. Η μεταβολή στη κατανάλωση της πρώτης και της δεύτερης περιόδου μετά από μια μεταβολή στο επιτόκιο.

Γενικά, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το πρόσημο της μεταβολής στην κατανάλωση της πρώτης περιόδου είναι αβέβαιο (εξαρτάται από το αν το αποτέλεσμα υποκατάστασης είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το αποτέλεσμα εισοδήματος). Με τον τρόπο που έχει σχεδιαστεί το Σχήμα 6.5, τα δύο αποτελέσματα αλληλοεξουδετερώνονται και η κατανάλωση της πρώτης περιόδου δεν μεταβάλλεται. Η κατανάλωση όμως της δεύτερης περιόδου αυξάνει μετά βεβαιότητας αν το c_{2t+1} είναι κανονικό αγαθό και ο καταναλωτής είναι δανειστής.

Τέλος προσέξτε ότι, μπορεί το πρόσημο της μεταβολής της c_{1t} να είναι αβέβαιο, αλλά αν ο καταναλωτής ήταν δανειστής (δηλαδή αν το σημείο Β είναι στα αριστερά του σημείου Α στο Σχήμα 6.5) όταν το επιτόκιο ήταν r_{t+1} θα παραμείνει δανειστής και στο ψηλότερο επιτόκιο r'_{t+1}. Αυτό γιατί αν ο καταναλωτής γίνει χρεώστης θα πρέπει να μετατοπιστεί στα δεξιά του σημείου Α (π.χ. σημείο Γ στο Σχήμα 6.6). Αυτές όμως οι επιλογές (π.χ. σημείο Γ) ήταν εφικτές για τον καταναλωτή όταν το επιτόκιο ήταν r_{t+1} και απορρίφθηκαν χάριν του σημείου Β. Ο νέος άριστος συνδυασμός θα πρέπει να μην ήταν αρχικά εφικτός, δηλαδή να βρίσκεται πάνω στο νέο εισοδηματικό περιορισμό και στα αριστερά του σημείου Α διαφορετικά ο καταναλωτής δεν συμπεριφέρεται «ορθολογικά».[17] Συγκεκριμένα ο καταναλωτής παραβιάζει την **αρχή της αποκαλυφθείσας προτίμησης** (principle of revealed preference) σύμφωνα με την οποία αν ένας συνδυασμός (c_1, c_2) επιλέγεται όταν το επιτόκιο είναι r και (x_1, x_2) είναι ένας άλλος συνδυασμός τέτοιος ώστε $(1+r)\,c_1 + c_2 \geq (1+r)\,x_1 + x_2$, τότε ο συνδυασμός (c_1, c_2) θα πρέπει να παρέχει ψηλότερη χρησιμότητα από το συνδυασμό (x_1, x_2).

[17] Η θέση του νέου άριστου συνδυασμού (Γ) εξακολουθεί να παραμένει άγνωστη σε σχέση με το σημείο Β (τον άριστο συνδυασμό στο επίπεδο του επιτοκίου r_{t+1}).



Σχήμα 6.6. Παραβίαση της αρχής της αποκαλυφθείσας προτίμησης. Αρχικό απόθεμα στο σημείο Α, επιλογή όταν $r = r_{t+1}$ στο σημείο Β και επιλογή όταν $r = r'_{t+1} > r_{t+1}$ στο σημείο Γ.

Με άλλα λόγια, ο καταναλωτής «αποκάλυψε» την πρώτη φορά με την επιλογή του ότι, όταν μπορεί να αγοράσει και τους δύο συνδυασμούς, προτιμά το συνδυασμό (c_1, c_2). Επομένως αν αργότερα, όταν πάλι μπορεί να αγοράσει και τους δύο συνδυασμούς, επιλέγει τον (x_1, x_2) δεν συμπεριφέρεται «ορθολογικά».

Όπως είναι γνωστό η εξίσωση που αναλύει το συνολικό αποτέλεσμα μιας μεταβολής της τιμής είναι γνωστή ως εξίσωση του Slutsky (βλ. Varian 1992, Κεφάλαιο 8). Στην προκειμένη περίπτωση η εξίσωση αυτή για τις c_{1t} και c_{2t+1} μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\Delta c_{1t}}{\Delta r_{t+1}} = \left.\frac{\Delta c_{1t}}{\Delta r_t}\right|_{U=\overline{U}} + (\omega_1 - c_{1t})\frac{\Delta c_{1t}}{\Delta \omega},$$

? - + +

$$\frac{\Delta c_{2t+1}}{\Delta r_{t+1}} = \left.\frac{\Delta c_{2t+1}}{\Delta r_t}\right|_{U=\overline{U}} + (\omega_1 - c_{1t})\frac{\Delta c_{2t+1}}{\Delta \omega}.$$

$$+ \qquad + \qquad\qquad + \qquad +$$

όπου Δ δηλώνει μεταβολή, $\Delta\omega \equiv (1+r)\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2$, και ο συμβολισμός $U = \overline{U}$ υποδηλώνει ότι το επίπεδο χρησιμότητας παραμένει σταθερό. Ο πρώτος όρος σε κάθε εξίσωση εκφράζει το αποτέλεσμα υποκατάστασης κατά Hicks (όπου ο καταναλωτής ταυτόχρονα με την αύξηση του r_{t+1} αποζημιώνεται για την μείωση στην αγοραστική του δύναμη ώστε να παραμείνει στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας). Ο δεύτερος όρος υποδηλώνει το αποτέλεσμα εισοδήματος. Ο ρόλος που παίζει ο όρος $\omega_1 - c_{1t}$ για το πρόσημο του εισοδηματικού αποτελέσματος είναι προφανής. Υπενθυμίζεται ότι αν ο καταναλωτής είναι πιστωτής, ο όρος αυτός είναι θετικός, ενώ αν είναι χρεώστης, ο όρος είναι αρνητικός.

Παράδειγμα 6.3. Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας $u = c_{1t}(c_{2t+1})^{\beta}$, $\beta > 0$. Βρείτε την κατανάλωση του ατόμου την πρώτη περίοδο και την δεύτερη περίοδο.

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με αυτά που ακολουθήσαμε για την επίλυση του προβλήματος (Π6.1) καταλήγουμε και πάλι στη γνωστή σχέση σύμφωνα με την οποία ο οριακός λόγος υποκατάστασης θα πρέπει να ισούται με το λόγο των τιμών (ή της μιας σχετικής τιμής) (εξίσωση 6.4):

$$\text{ΟΛΥ} = \frac{\partial u_t / \partial c_{1t}}{\partial u_t / \partial c_{2t+1}} = 1 + r_{t+1},$$

όπου $\partial u_t / \partial c_{1t} = (c_{2t+1})^{\beta}$ και $\partial u_t / \partial c_{2t+1} = \beta c_{1t}(c_{2t+1})^{\beta-1}$. Επομένως,

$$\frac{c_{2t+1}}{\beta c_{1t}} = 1 + r_{t+1} \qquad \text{(I)}$$

Συνδυάζοντας την (I) με τον εισοδηματικό περιορισμό (6.3) έχουμε

$$c_{1t} = \frac{1}{1+\beta}\frac{\omega_{t+1}}{1+r_{t+1}} \quad \text{και} \quad c_{2t+1} = \frac{\beta}{1+\beta}\omega_{t+1},$$

$$\text{όπου} \quad \omega_{t+1} \equiv (1+r_{t+1})\omega_1 + \omega_2 .$$

Παρατηρήστε ότι μια αύξηση στα ω_1 και ω_2 αυξάνει την κατανάλωση και στις δύο περιόδους. Επίσης μια αύξηση του r_{t+1} μειώνει την κατανάλωση της πρώτης περιόδου. Αυτό συμβαίνει γιατί, με τις συγκεκριμένες προτιμήσεις, το αρνητικό αποτέλεσμα υποκατάστασης υπερισχύει του θετικού αποτελέσματος εισοδήματος. Τέλος, μια αύξηση του επιτοκίου αυξάνει την κατανάλωση της δεύτερης περιόδου (τόσο το αποτέλεσμα υποκατάστασης όσο και το αποτέλεσμα εισοδήματος είναι θετικά). ■

Άσκηση 6.3. Να επαναλάβετε το Παράδειγμα 6.3 χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση χρησιμότητας

$$\ln c_{1t} + \beta \ln c_{2t+1}, \quad \text{όπου} \quad \beta > 0$$

Άσκηση 6.4. Να επαναλάβετε το Παράδειγμα 6.3 χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση χρησιμότητας (U2) του Παραδείγματος 6.2.

Η Συνάρτηση Αποταμίευσης

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον εισοδηματικό περιορισμό (6.1) μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση αποταμίευσης

$$s_t = \omega_1 - \chi(r_{t+1}, \omega_1, \omega_2) = s(\underset{?}{r_{t+1}}, \underset{+}{\omega_1}, \underset{-}{\omega_2}) . \tag{6.6}$$

Όπως ήδη γνωρίζουμε, η κατανάλωση εξαρτάται από το εισόδημα και τη σχετική τιμή και η αποταμίευση είναι ίση με το εισόδημα μείον την κατανάλωση. Έπεται λοιπόν ότι και η αποταμίευση εξαρτάται από το εισόδημα και τη σχετική τιμή. Εάν η κατανάλωση ενός ατόμου είναι μικρότερη από το απόθεμα του, τότε το άτομο δανείζει μονάδες του αγαθού (είναι δηλαδή πιστωτής) και η αποταμίευση του είναι θετική ή με άλλα λόγια έχει υπερβάλλουσα προσφορά για κατανάλωση. Αντίθετα εάν η κατανάλωση ενός ατόμου είναι μεγαλύτερη από το απόθεμα του, τότε το άτομο δανείζεται μονάδες του αγαθού (χρεώστης) και η αποταμίευση του είναι αρνητική, δηλαδή έχει υπερβάλλουσα ζήτηση για κατανάλωση.

Όπως είδαμε προηγουμένως, αν ο καταναλωτής είναι πιστωτής στο επιτόκιο r_{t+1} τότε θα είναι πιστωτής και στο επιτόκιο r'_{t+1}, όπου $r'_{t+1} > r_{t+1}$. Η αντίστοιχη με αυτήν πρόταση είναι ότι αν $s_t > 0$ όταν το επιτόκιο είναι r_{t+1}, τότε $s_t > 0$ και όταν το επιτόκιο είναι r'_{t+1}, όπου $r'_{t+1} > r_{t+1}$.

Η ερμηνεία των πρόσημων που εμφανίζονται στην (6.6) είναι η εξής. Κάτω από την υπόθεση ότι η κατανάλωση και τις δύο περιόδους είναι κανονικό αγαθό, μια αύξηση του ω_1 θα αυξήσει την κατανάλωση και στις δύο περιόδους. Για να είναι αυτό εφικτό θα πρέπει το άτομο να μεταφέρει εισόδημα από την πρώτη περίοδο στη δεύτερη, δηλαδή θα πρέπει να αποταμιεύσει περισσότερο. Επίσης, κάτω από την ίδια υπόθεση της κανονικότητας, μια αύξηση του ω_2 θα αυξήσει την κατανάλωση και στις δύο περιόδους. Για να είναι αυτό εφικτό θα πρέπει το άτομο να μεταφέρει εισόδημα από τη δεύτερη περίοδο στην πρώτη, δηλαδή θα πρέπει να αποταμιεύσει λιγότερο. Τέλος, όπως έχουμε ήδη δει, μια αύξηση του r_{t+1} προκαλεί ένα αποτέλεσμα υποκατάστασης και ένα αποτέλεσμα εισοδήματος πάνω στην κατανάλωση της πρώτης περιόδου. Επομένως θα έχει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα αλλά με αντίθετο πρόσημο πάνω στην αποταμίευση.

Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι το άθροισμα των ατομικών συναρτήσεων αποταμίευσης μας δίνει τη συνολική συνάρτηση αποταμίευσης (S). Έτσι, για όλη την οικονομία έχουμε

$$S_t = N_t s(r_{t+1}, \omega_1, \omega_2). \tag{6.7}$$

Παράδειγμα 6.4. Για τη συνάρτηση χρησιμότητας του Παραδείγματος 6.3 βρείτε το ποσό της αποταμίευσης s_t κάθε νέου ατόμου και τη συνολική συνάρτηση αποταμίευσης.

Από τον εισοδηματικό περιορισμό της πρώτης περιόδου (εξίσωση 6.1) και τη συνάρτηση κατανάλωσης της πρώτης περιόδου που βρήκαμε στο Παράδειγμα 6.3 έχουμε

$$s_t = \omega_1 - c_{1t} = \omega_1 - \frac{1}{1+\beta}\left\{\omega_1 + \frac{1}{1+r_{t+1}}\omega_2\right\}$$
$$= \frac{1}{1+\beta}\left\{\beta\omega_1 - \frac{1}{1+r_{t+1}}\omega_2\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι, όπως αναμένεται από την ανάλυση που ακολουθεί την εξίσωση (6.6), η αποταμίευση εξαρτάται θετικά από το απόθεμα της πρώτης περιόδου και αρνητικά από το απόθεμα της δεύτερης. Επίσης αφού το επιτόκιο έχει αρνητική επίδραση στην κατανάλωση της πρώτης περιόδου (θυμηθείτε από το Παράδειγμα 6.3 ότι με τις συγκεκριμένες προτιμήσεις το αποτέλεσμα υποκατάστασης υπερισχύει), θα έχει θετική επίδραση στην αποταμίευση. Τέλος, η συνολική αποταμίευση είναι το N-στό πολλαπλάσιο της ατομικής αφού όλα τα άτομα είναι ίδια. Επομένως,

$$S_t = N_t \frac{1}{1+\beta}\left\{\beta\omega_1 - \frac{1}{1+r_{t+1}}\omega_2\right\}.$$

■

Άσκηση 6.5. Να επαναλάβετε το Παράδειγμα 6.4 χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση χρησιμότητας της Άσκησης 6.3.

Άσκηση 6.6. Να επαναλάβετε το Παράδειγμα 6.4 χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση χρησιμότητας (U2) του Παραδείγματος 6.2.

Έλλειψη Αγοράς Πίστεως

Μέχρι τώρα εξετάσαμε τη συμπεριφορά του αντιπροσωπευτικού ατόμου και τον τρόπο προσδιορισμού των συναρτήσεων κατανάλωσης και αποταμίευσης, κάτω από την υπόθεση ότι το άτομο μπορεί να δανείζει ή να δανείζεται ελεύθερα. Το σημείο Β στο Σχήμα 6.4. είναι σημείο μεγιστοποίησης της χρησιμότητας του καταναλωτή όταν υπάρχει η δυνατότητα σύναψης δανείων. Όταν όμως τα άτομα δεν έχουν τη δυνατότητα να συνάψουν δάνεια τότε δεν μπορούν να μεταφέρουν πόρους από τη μία περίοδο στην άλλη.[18] Επομένως η αποταμίευση κάθε ατόμου είναι μηδενική και ο δια βίου

[18] Θυμηθείτε ότι δεν υπάρχει η δυνατότητα αποθήκευσης του αγαθού.

εισοδηματικός περιορισμός στη γενική του μορφή (6.3) δεν ισχύει. Με άλλα λόγια, οι εισοδηματικοί περιορισμοί (6.1) και (6.2) δεν μπορούν να συνδυαστούν και κατά συνέπεια μόνο ένα σημείο του δια βίου εισοδηματικού περιορισμού είναι εφικτό για τους καταναλωτές, αυτό που δίνεται από το αρχικό τους απόθεμα (σημείο Α). Το πρόβλημα του καταναλωτή σε αυτή την περίπτωση τροποποιείται ως εξής:

Να μεγιστοποιηθεί ως προς c_{1t} και c_{2t+1} η συνάρτηση:

$$u_t = u(c_{1t}, c_{2t+1}) \tag{Π6.2}$$

Υπό τους περιορισμούς: $c_{1t} = \omega_1$ και $c_{2t+1} = \omega_2$.

Η λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι προφανώς η $c_{1t} = \omega_1$ και $c_{2t+1} = \omega_2$ (σημείο Α).

Παράδειγμα 6.5. Να επαναλάβετε τα Παραδείγματα 6.3. και 6.4. στην περίπτωση που δεν υπάρχει η δυνατότητα δανεισμού.

Προφανώς στην περίπτωση που ο δανεισμός δεν είναι διαθέσιμος, τα άτομα δεν μπορούν να αποταμιεύσουν. Επιπλέον, όπως έχουμε υποθέσει, δεν υπάρχει η δυνατότητα αποθήκευσης του αγαθού. Επομένως, $c_{1t} = \omega_1$, $c_{2t+1} = \omega_2$, $s_t = 0$ και $S_t = 0$.

Η Αρχική Γενεά

Η ανάλυση μέχρι τώρα αφορούσε όλες τις γενεές πλην της αρχικής. Το πρόβλημα της αρχικής γενεάς είναι απλούστερο. Το επίπεδο χρησιμότητας των μελών αυτής της γενεάς εξαρτάται μόνο από την κατανάλωσή τους τη δεύτερη περίοδο του βίου τους. Η κατανάλωσή τους την πρώτη περίοδο του βίου τους (περίοδος 0) είναι εκτός του ορίζοντα της ανάλυσής μας και επομένως δεν μας ενδιαφέρει. Ο σκοπός λοιπόν της αρχικής γενεάς είναι να καταναλώσει όσο το δυνατό περισσότερο, γεγονός που οδηγεί στη λύση $c_{21} = \omega_2 + r_1 s_0$ (φυσικά αν ο δανεισμός δεν είναι εφικτός, οπότε $s_0 = 0$, τότε θα καταναλώσουν το απόθεμα τους, $c_{21} = \omega_2$).

6.3. Γενική Ισορροπία

Ορισμός 6.1. Μια ανταγωνιστική ισορροπία είναι μια ακολουθία τιμών (στην προκειμένη περίπτωση επιτοκίων) $\{r_1, r_2, \ldots\}$ και ένα σύνολο ποσοτήτων κατανάλωσης $\{c_{21}, c_{11}, c_{22}, c_{12}, c_{23}, \ldots\}$ τα οποία ικανοποιούν τις παρακάτω δύο συνθήκες:[19]

1. Με δεδομένες τις τιμές και το αρχικό απόθεμα κάθε ατόμου, οι σχετικές με αυτόν ποσότητες μεγιστοποιούν τη συνάρτηση χρησιμότητάς του.
2. Η ζήτηση είναι ίση με την προσφορά σε κάθε αγορά και για κάθε περίοδο $t \geq 1$.

Ο Ορισμός 6.1 είναι ανάλογος του Ορισμού 1.2. Ας σημειωθεί ότι στην οικονομία που εξετάζουμε κάθε περίοδο υπάρχει μόνο μια τιμή, αυτή της κατανάλωσης την τρέχουσα περίοδο σε σχέση με την κατανάλωση την επόμενη περίοδο, που σχετίζεται με το επιτόκιο, r_{t+1}. Η πρώτη συνθήκη λοιπόν απαιτεί τα άτομα να συμπεριφέρονται με τέτοιο τρόπο σαν να μην έχουν καμία επίδραση στις τιμές (λαμβάνουν τις τιμές ως δεδομένες). Με άλλα λόγια, το μέγεθος τους είναι αμελητέο σε σχέση με το μέγεθος της αγοράς. Επίσης, δεν υπάρχει καμία συμμαχία μεταξύ ατόμων για να επηρεάσουν τις τιμές. Τέλος, με δεδομένη αυτή τη συμπεριφορά και τη μορφή των αποθεμάτων (ω_1, ω_2), η ποσότητα c_{21}, που αναφέρεται στην κατανάλωση της γενεάς 0 τη δεύτερη περίοδο του βίου της μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά της. Παρόμοια, οι ποσότητες c_{11} και c_{22} μεγιστοποιούν τη συνάρτηση χρησιμότητας της γενεάς 1, οι ποσότητες c_{12} και c_{23} μεγιστοποιούν τη συνάρτηση χρησιμότητας της γενεάς 2, κ.ο.κ.

Συχνά θα περιορίσουμε την ανάλυση, για λόγους απλοποίησης, σε μια ειδική περίπτωση κατανομών που ονομάζονται στάσιμες.

Ορισμός 6.2. Μια κατανομή καλείται **στάσιμη** (stationary) αν οι ποσότητες που καταναλώνει η γενεά 1 είναι ίσες με τις ποσότητες που

[19] Ένας πιο συμπαγής συμβολισμός είναι $\{r_t\}_{t=1}^{\infty}$ και $\{c_{2t}, c_{1t}\}_{t=1}^{\infty}$.

καταναλώνει κάθε μελλοντική γενεά. Δηλαδή, $c_{1t} = c_1$ και $c_{2t+1} = c_2$ $\forall\, t = 1,2,\ldots$

Στην συγκεκριμένη οικονομία που αναλύουμε εδώ η γενική ισορροπία είναι στάσιμη επειδή η μορφή των αποθεμάτων είναι στάσιμη, δηλαδή $\omega_{1t} = \omega_1$ και $\omega_{2t} = \omega_2$ $\forall\, t = 1,2,\ldots$. Έπεται από τον ορισμό της στάσιμης κατανομής και τον εισοδηματικό περιορισμό της πρώτης περιόδου, $c_{1t} + s_t = \omega_1$, ότι αν $c_{1t} = c_1$ $\forall\, t = 1,2,\ldots,$ τότε $s_t = s$ $\forall\, t = 1,2,\ldots$ Τέλος, συχνά αντί του όρου στάσιμη κατανομή χρησιμοποιείται ο όρος **κατανομή σταθερής καταστάσεως** (steady state).

Κλειστή Οικονομία

Ας προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε το σημείο γενικής ισορροπίας του συστήματος στην περίπτωση μιας οικονομίας όπου δεν υπάρχει εμπόριο αγαθών και δανειακών κεφαλαίων (ή ισοδύναμα χρεογράφων) με τον υπόλοιπο κόσμο (κλειστή οικονομία).

Η δεύτερη συνθήκη του ορισμού της γενικής ισορροπίας απαιτεί η ζήτηση να είναι ίση με την προσφορά σε κάθε αγορά και για κάθε περίοδο $t \geq 1$. Δηλαδή, αν $c_{1t} = \chi(r_{t+1}, \omega_1, \omega_2)$ και $c_{2t+1} = \psi(r_{t+1}, \omega_1, \omega_2)$ είναι οι συναρτήσεις ζήτησης που προκύπτουν από τη μεγιστοποίηση του προβλήματος του καταναλωτή, τότε θα πρέπει σε κάθε περίοδο *t* να ισχύει

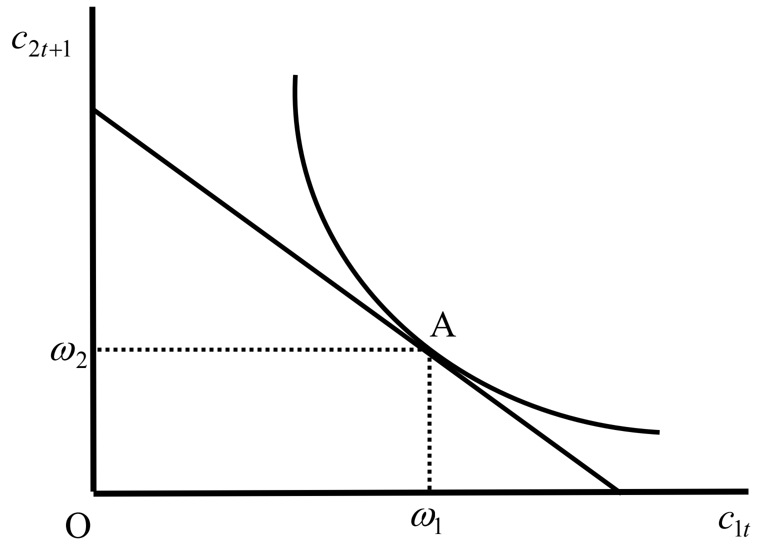
$$N_t c_{1t} + N_{t-1} c_{2t} = Y_t = N_t \omega_1 + N_{t-1} \omega_2, \tag{6.8}$$

όπου Y_t δηλώνει το συνολικό προϊόν που είναι διαθέσιμο στην οικονομία (συνολική προσφορά). Φυσικά το συνολικό προϊόν είναι ίσο με το απόθεμα που διαθέτει κάθε νέο άτομο επί τον αριθμό των νέων ατόμων ($N_t \omega_1$) συν το απόθεμα που διαθέτει κάθε ηλικιωμένο άτομο επί τον αριθμό των ηλικιωμένων ατόμων ($N_{t-1}\omega_2$). Από την άλλη μεριά, το αριστερό μέλος της (6.8) δίνει τη συνολική ζήτηση του προϊόντος. Επομένως η (6.8) περιγράφει την ισορροπία στην αγορά του αγαθού, όπου κάθε περίοδο η ζήτηση είναι ίση με την προσφορά.

Όλα τα μέλη μιας γενεάς *t* έχουν τις ίδιες προτιμήσεις και την ίδια μορφή αποθέματος. Επομένως δεν υπάρχει λόγος οποιασδήποτε συναλλαγής μεταξύ τους, αφού όλοι θέλουν να είναι πιστωτές ή χρεώστες την πρώτη περίοδο. Με άλλα λόγια υπάρχει έλλειψη **διπλής σύμπτωσης επιθυμιών** (double coincidence of wants). Όμως σε μια εμπράγματη οικονομία, η ύπαρξη διπλής σύμπτωσης επιθυμιών είναι αναγκαία συνθήκη για τη διενέργεια οποιασδήποτε οικονομικής ανταλλαγής που γίνεται με ελεύθερη βούληση. Κατά συνέπεια, δεν θα υπάρξουν συναλλαγές με άτομα που ανήκουν στην ίδια γενεά.

Τα μόνα άλλα άτομα που είναι εν ζωή την περίοδο t είναι τα μέλη της γενεάς t-1, τα οποία ενδεχομένως θα ήθελαν να συνάψουν δάνεια. Το πρόβλημα είναι ότι δεν θα βρίσκονται στη ζωή την επόμενη περίοδο για να πληρώσουν πίσω τα δάνεια και επομένως κανείς δεν θέλει να προχωρήσει σε οποιαδήποτε ανταλλαγή μαζί τους. Επιπλέον, τα άτομα αυτά δεν θα ήθελαν να δανείσουν κάποιον, αφού η τρέχουσα περίοδος είναι η τελευταία της ζωής τους και επομένως την επόμενη περίοδο, όταν θα πρέπει να εισπράξουν πίσω το ποσό του δανείου και τους τόκους, δεν θα βρίσκονται στη ζωή. Για άλλη μια φορά υπάρχει έλλειψη διπλής σύμπτωσης επιθυμιών.

Η περίπτωση αυτή είναι λοιπόν ανάλογη αυτής που τα άτομα δεν έχουν τη δυνατότητα να συνάψουν δάνεια (έλλειψη αγοράς πίστεως). Το σημείο γενικής ισορροπίας είναι επομένως αυτό που προσδιορίζει η μορφή των αποθεμάτων. Η ισορροπία είναι **αυτάρκης** (autarkic) με την έννοια ότι δεν γίνεται καμία ανταλλαγή (Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα του Κεφαλαίου). Όλα τα άτομα καταναλώνουν ω_1 μονάδες την πρώτη περίοδο του βίου τους και ω_2 μονάδες τη δεύτερη. Δηλαδή, $c_{1t} = \omega_1$ και $c_{2t+1} = \omega_2 \ \forall\ t$. Το επιτόκιο ισορροπίας δεν παρατηρείται αφού δεν λαμβάνει χώρα κανενός είδους συναλλαγή. Με άλλα λόγια, στο επιτόκιο ισορροπίας κανείς δεν επιθυμεί να δανείσει και κανείς δεν επιθυμεί να δανειστεί. Επομένως το επιτόκιο ισορροπίας καθορίζεται από την κλίση της καμπύλης αδιαφορίας στο σημείο του αποθέματος (βλ. Σχήμα 6.7). Συγκεκριμένα, ένα συν το επιτόκιο ισούται με την απόλυτη τιμή της κλίσης της καμπύλης αδιαφορίας στο αρχικό σημείο (σημείο αποθεμάτων), η οποία είναι ίση με τον ΟΛΥ στο εν λόγω σημείο.



Σχήμα 6.7. Ισορροπία στην περίπτωση της κλειστής οικονομίας. Η οικονομία χαρακτηρίζεται από αυτάρκεια, με την έννοια ότι στην ισορροπία τα άτομα καταναλώνουν το απόθεμα τους (σημείο Α). Η απόλυτη τιμή της κλίσης της καμπύλης αδιαφορίας στο σημείο Α είναι ίση με 1 συν το επιτόκιο αυτάρκειας.

Αφού $c_{2t+1} = \omega_2$, συνεπάγεται ότι $N_{t-1}c_{2t} = N_{t-1}\omega_2$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση και την (6.1), η (6.8) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$N_t(\omega_1 - c_{1t}) = N_t s_t = 0,$$

ή

$$S_t = 0, \qquad (6.9)$$

όπου S_t είναι η συνολική αποταμίευση. Η εξίσωση (6.9) περιγράφει μια κατάσταση ισορροπίας στην αγορά πίστεως. Εφόσον η οικονομία είναι κλειστή και δεν υπάρχει η δυνατότητα μεταφοράς αγαθών από τη μια περίοδο στην άλλη, τότε η συνολική αποταμίευση θα είναι μηδέν. Επομένως, αποδείξαμε ότι όταν είναι σε ισορροπία η αγορά αγαθών τότε είναι σε ισορροπία και η αγορά πίστεως. Το αποτέλεσμα αυτό είναι απόρροια του νόμου του Walras (Πρόταση 1.1). Συγκεκριμένα, σε κάθε περίοδο υπάρχουν δύο αγορές, η αγορά αγαθών και η αγορά πίστεως ή αγορά δανειακών κεφαλαίων. Σύμφωνα με το νόμο του Walras, αν μία από αυτές είναι σε ισορροπία, τότε θα είναι αναγκαστικά και η άλλη. Τέλος, σε μια αυτάρκη ισορροπία έχουμε $c_{1t} = \omega_1$ και $c_{2t+1} = \omega_2 \quad \forall\, t$. Επομένως η υπόθεση ότι τα άτομα λαμβάνουν τις ίδιες ποσότητες αποθεμάτων ανεξαρτήτως της γενεάς στην οποία ανήκουν συνεπάγεται ότι η αυτάρκης ισορροπία είναι στάσιμη.

Παράδειγμα 6.6. Έστω μια οικονομία στην οποία οι προτιμήσεις περιγράφονται από τη συνάρτηση χρησιμότητας (U1) του Παραδείγματος 6.2. Υποθέστε επίσης ότι $\beta = 1,\ \omega_1 = 2,\ \ \omega_2 = 1$ και $N_t = 100, \ \ \forall t$. Προσδιορίστε το σημείο γενικής ισορροπίας στην περίπτωση μιας κλειστής οικονομίας.

Υπενθυμίζεται ότι η συνολική συνάρτηση αποταμίευσης είναι (βλ. Παράδειγμα 6.4)

$$S_t = N_t \frac{1}{1+\beta}\left\{\beta\omega_1 - \frac{1}{1+r_{t+1}}\omega_2\right\}.$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα της οικονομίας έχουμε

$$S_t = 100\frac{1}{2}\left\{2 - \frac{1}{1+r_{t+1}}\right\}.$$

Θέτοντας $S_t = 0$ και λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε $r_{t+1} = -1/2 \quad \forall\, t \geq 1.$[20] Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στις συναρτήσεις κατανάλωσης (βλ. Παράδειγμα 6.3.) έχουμε

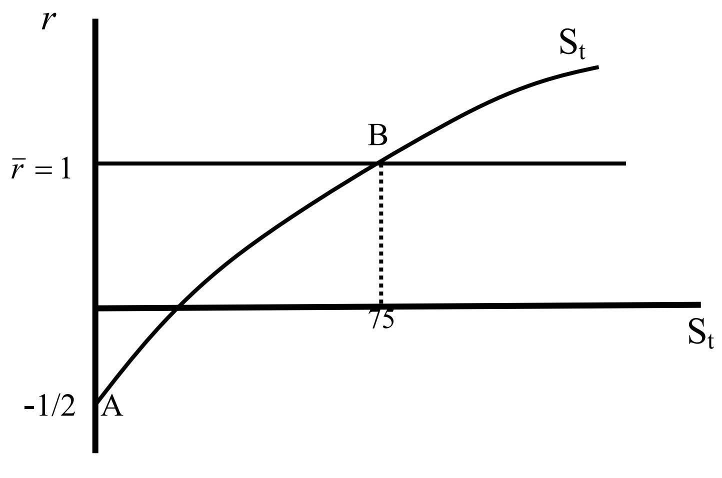
$$c_{1t} = \frac{1}{1+\beta}\frac{\omega_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

[20] Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση (6.8). Αυτή η προσέγγιση θα δώσει δύο τιμές για το επιτόκιο, -1/2 και 0. Η δεύτερη τιμή απορρίπτεται επειδή δεν ικανοποιεί τις συνθήκες αυτάρκειας: $c_{1t} = \omega_1$ και $c_{2t} = \omega_2$.

ή $c_{1t} = 2 \quad \forall\, t \geq 1$. Παρομοίως αντικαθιστώντας στη συνάρτηση ζήτησης για κατανάλωση τη δεύτερη περίοδο

$$c_{2t} = \frac{\beta}{1+\beta}\omega_t, \quad \text{όπου} \quad \omega_t \equiv (1+r_t)\omega_1 + \omega_2.$$

έχουμε $c_{2t} = 1 \quad \forall\, t \geq 1$. Επομένως επιβεβαιώνεται ότι η οικονομία είναι αυτάρκης. Ας σημειωθεί ότι η ακολουθία των επιτοκίων δεν παρατηρείται, αφού κανείς δεν δανείζει ή δανείζεται, αλλά παρόλα αυτά υπάρχει. Είναι η ακολουθία που καθιστά το αρχικό σημείο των αποθεμάτων σημείο ισορροπίας. Με άλλα λόγια, σε αυτό το επιτόκιο τα άτομα δεν επιθυμούν να εμπλακούν σε κανενός είδους εμπόριο και αποφασίζουν οικιοθελώς να καταναλώσουν κάθε περίοδο το απόθεμα που διαθέτουν. Η γραφική παράσταση της συνολικής αποταμίευσης (ως συνάρτηση της τιμής-επιτοκίου) δίνεται στο Σχήμα 6.8. Το σημείο ισορροπίας στο παράδειγμα αυτό είναι το σημείο A, σημείο στο οποίο η συνολική αποταμίευση είναι μηδενική.



Σχήμα 6.8. Ισορροπία στην Κλειστή Οικονομία (σημείο A) του Παραδείγματος 6.6. και στη Μικρή Ανοικτή Οικονομία (σημείο B) του Παραδείγματος 6.7.

Άσκηση 6.7. Να επαναλάβετε το Παράδειγμα 6.6 χρησιμοποιώντας $\beta = 1$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 0.5$, $N_0 = 100$ και $n = 0.05$.

Άσκηση 6.8. Να επαναλάβετε το Παράδειγμα 6.6 χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση χρησιμότητας (U2) του Παραδείγματος 6.2.

Άσκηση 6.9. Να επαναλάβετε την Άσκηση 6.8 χρησιμοποιώντας $\beta = 1$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 0.5$, $N_0 = 100$ και $n = 0.05$.

Μικρή Ανοικτή Οικονομία

Η επόμενη περίπτωση που εξετάζουμε είναι αυτή όπου τα άτομα έχουν τη δυνατότητα να συνάψουν δάνεια με τον υπόλοιπο κόσμο. Για λόγους απλοποίησης της παρουσίασης υποθέτουμε ότι η οικονομία είναι μικρή, με την έννοια ότι δεν μπορεί να επηρεάσει τις διεθνείς τιμές (στην προκειμένη περίπτωση το παγκόσμιο επιτόκιο δανεισμού). Υποθέτουμε επομένως ότι το επιτόκιο r προσδιορίζεται στις διεθνείς αγορές και είναι δεδομένο για τη μικρή οικονομία.[21] Υποθέτουμε επίσης ότι το διεθνές επιτόκιο είναι σταθερό, δηλαδή $r_t = \bar{r}$ για κάθε t. Αυτή η υπόθεση όπως θα δούμε παρακάτω καθιστά την γενική ισορροπία του συστήματος στάσιμη.

Θυμηθείτε ότι η δεύτερη συνθήκη του ορισμού της γενικής ισορροπίας απαιτεί η ζήτηση του καταναλωτικού αγαθού να είναι ίση με την προσφορά του, δηλαδή,

$$N_t c_{1t} + N_{t-1} c_{2t} = N_t \omega_1 + N_{t-1} \omega_2 - N_t l_t + N_{t-1}(1+\bar{r}) l_{t-1},$$

Όπου $l_t\,(l_{t-1})$ δηλώνει το ποσό του δανείου που έχει συνάψει κάθε μέλος της γενεάς $t\,(t-1)$ με οικονομικές μονάδες του εξωτερικού. Το άθροισμα των δύο τελευταίων όρων στο δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης δηλώνει την καθαρή εισροή ή εκροή αγαθών από το εξωτερικό. Αφού τα άτομα δεν συνάπτουν δάνεια με άτομα της ίδιας

[21] Η περίπτωση της μεγάλης ανοικτής οικονομίας, όπου οι διεθνείς τιμές και συγκεκριμένα το επιτόκιο επηρεάζεται από την συμπεριφορά των κατοίκων της, είναι περισσότερο πολύπλοκη και δεν εξετάζεται εδώ. Ας σημειωθεί επίσης ότι η περίπτωση της μικρής ανοικτής οικονομίας έχει κοινά χαρακτηριστικά με τις περιπτώσεις όπου οι προτιμήσεις μεταξύ των μελών μιας γενεάς ή οι μορφές του αποθέματος που λαμβάνουν είναι διαφορετικές, με την έννοια ότι σε όλες αυτές τις περιπτώσεις συνάπτονται δάνεια και το τελικό σημείο διαφέρει από το αρχικό (υπάρχει δηλαδή διαχρονική ανταλλαγή). Οι περιπτώσεις αυτές αναλύονται στο επόμενο κεφάλαιο.

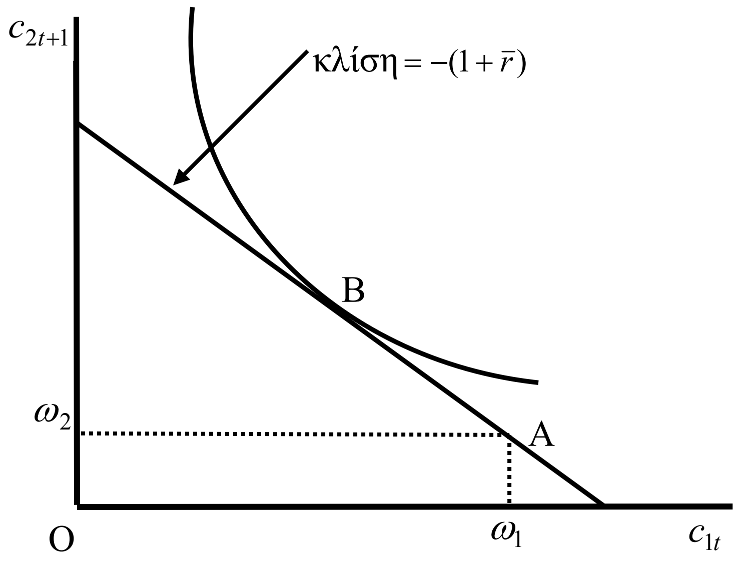
ή άλλης γενεάς που κατοικούν στη μικρή οικονομία που εξετάζουμε, η αποταμίευση κάθε νέου ατόμου είναι ίση με τα δάνεια που συνάπτει με μονάδες του εξωτερικού, δηλαδή $s_t = l_t$ και επομένως

$$S_t = N_t s_t = N_t l_t.$$

Με τη δυνατότητα δανεισμού προς τον υπόλοιπο κόσμο τα άτομα μεγιστοποιούν τη χρησιμότητά τους στο σημείο B του Σχήματος 6.9 όπου η ψηλότερη δυνατή καμπύλη αδιαφορίας εφάπτεται του εισοδηματικού περιορισμού ο οποίος διέρχεται από το σημείο αποθέματος και έχει κλίση $-(1+\bar{r})$, όπου $\bar{r}$ είναι το διεθνές επιτόκιο. Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε γενεά επιλύει το ίδιο πρόβλημα (Π1), από το οποίο προκύπτουν οι ατομικές συναρτήσεις ζήτησης για κατανάλωση, c_{1t} και c_{2t+1}, και η ατομική συνάρτηση προσφοράς δανείων (ζήτησης για χρεόγραφα), $s_t, \forall t$. Οι συναρτήσεις αυτές περιέχουν ως μεταβλητές τα αποθέματα, ω_1 και ω_2, τα οποία είναι στάσιμα (ανεξάρτητα του χρόνου) εξ' υποθέσεως και το διεθνές επιτόκιο, $\bar{r}$, το οποίο επίσης υποθέτουμε ότι είναι στάσιμο. Επομένως, η ισορροπία στην μικρή ανοικτή οικονομία θα είναι στάσιμη, δηλαδή, $c_{1t} = c_1$ και $c_{2t+1} = c_2 \ \forall t$.

Παράδειγμα 6.7. Έστω μια οικονομία στην οποία οι προτιμήσεις περιγράφονται από τη συνάρτηση χρησιμότητας (U1) του Παραδείγματος 6.2. Υποθέστε επίσης ότι $\beta = 1,\ \omega_1 = 2,\ \ \omega_2 = 1$ και $N_t = 100,\ \ \forall t$. Προσδιορίστε το σημείο γενικής ισορροπίας στην περίπτωση μιας μικρής ανοικτής οικονομίας όταν το διεθνές επιτόκιο σε κάθε περίοδο είναι 1. (Παρατηρήστε ότι τα δεδομένα της οικονομίας αυτής είναι ίδια με αυτά του Παραδείγματος 6.6).

Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία των επιτοκίων ισορροπίας θα είναι $r_t = 1 \ \forall t$. Απομένει να προσδιορίσουμε τις ποσότητες. Αντικαθιστώντας στις συναρτήσεις ζήτησης για κατανάλωση (βλ. Παράδειγμα 6.3) βρίσκουμε ότι $c_{1t} = 5/4$ και $c_{2t} = 5/2 \ \forall t$.



Σχήμα 6.9. Μεγιστοποίηση της χρησιμότητας στην περίπτωση της Μικρής Ανοικτής Οικονομίας. Το αρχικό απόθεμα βρίσκεται στο σημείο Α. Ο καταναλωτής προτιμά να εξομαλύνει την κατανάλωσή του διαχρονικά και επιλέγει το σημείο Β. Η κλίση του εισοδηματικού περιορισμού καθορίζεται από το διεθνές επιτόκιο $\bar{r}$.

Επίσης η αποταμίευση είναι $s_t = l_t = \omega_1 - c_{1t} = 2-(5/4) = 3/4$ και η συνολική αποταμίευση $S_t = N_t s_t = 100 \times (3/4) = 75$. Οι τιμές αυτές μπορούν να επιβεβαιωθούν και με αντικατάσταση της τιμής του επιτοκίου στις συναρτήσεις ατομικής και συνολικής αποταμίευσης (βλ. Παράδειγμα 6.4). Το σημείο ισορροπίας στο παράδειγμα παρίσταται από το σημείο Β στο Σχήμα 6.8. Με άλλα λόγια, το σημείο ισορροπίας στην περίπτωση μιας ανοικτής οικονομίας αντιστοιχεί στο σημείο τομής της προσφοράς δανείων (S_t) και μιας τελείως ελαστικής ζήτησης για δάνεια από τον υπόλοιπο κόσμο που δίνεται από την οριζόντια γραμμή $\bar{r} = 1$. Αντίθετα, υπενθυμίζεται ότι όπως βρήκαμε στο Παράδειγμα 6.6, στην περίπτωση της κλειστής οικονομίας το σημείο γενικής ισορροπίας αντιστοιχεί στο σημείο όπου η προσφορά δανείων είναι μηδενική (σημείο Α στο Σχήμα 6.8).

Άσκηση 6.10. Να επαναλάβετε το Παράδειγμα 6.7 όταν $\beta = 1$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 0.5$, $N_0 = 100$ και $n = 0.05$.

Άσκηση 6.11. Να επαναλάβετε το Παράδειγμα 6.7. χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση χρησιμότητας (U2) του Παραδείγματος 6.2.

Άσκηση 6.12. Να επαναλάβετε την Άσκηση 6.11 όταν $\beta = 1$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 0.5$, $N_0 = 100$ και $n = 0.05$.

6.4. Ερωτήσεις

Σχολιάστε την εγκυρότητα των παρακάτω προτάσεων. Αν πιστεύετε ότι μια πρόταση είναι σωστή κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις τότε να αναφέρετε αυτές τις προϋποθέσεις.

1. Η κατανάλωση εξαρτάται θετικά από το επιτόκιο.

2. Η κατανάλωση εξαρτάται αρνητικά από τα αποθέματα.

3. Μια μεταβολή στο επιτόκιο έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα υποκατάστασης πάνω στην κατανάλωση της πρώτης περιόδου.

4. Μια μεταβολή στο επιτόκιο έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα υποκατάστασης πάνω στην κατανάλωση της δεύτερης περιόδου.

5. Μια μεταβολή στο επιτόκιο έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα εισοδήματος πάνω στην κατανάλωση της πρώτης περιόδου.

6. Μια μεταβολή στο επιτόκιο έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα εισοδήματος πάνω στην κατανάλωση της δεύτερης περιόδου.

7. Μια μεταβολή στο επιτόκιο έχει ένα αρνητικό αποτέλεσμα υποκατάστασης πάνω στην αποταμίευση.

8. Σε μια κλειστή οικονομία η ισορροπία είναι αυτάρκης.

9. Σε μια μικρή ανοικτή οικονομία η ισορροπία είναι αυτάρκης.

10. Το μικτό επιτόκιο σχετίζεται με το λόγο των τιμών των καταναλώσεων δύο διαδοχικών περιόδων.

6.5. Παράρτημα

Α. Η Σχέση μεταξύ Σχετικής Τιμής και Επιτοκίου

Το πρόβλημα ενός αντιπροσωπευτικού καταναλωτή που είδαμε στο Κεφάλαιο αυτό είναι:

Να μεγιστοποιηθεί ως προς c_{1t} και c_{2t+1} η συνάρτηση: $u_t = u(c_{1t}, c_{2t+1})$ υπό τους περιορισμούς:

$$p_t c_{1t} + p_t s_t = p_t \omega_1 \tag{6A.1}$$

και

$$p_{t+1} c_{2t+1} = p_{t+1} \omega_2 + p_t s_t, \tag{6A.2}$$

όπου όλες οι τιμές είναι σε όρους μιας φανταστικής λογιστικής μονάδας. Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να θέσουμε ως βάση μέτρησης (numéraire) την τιμή της κατανάλωσης την περίοδο $t = 1$, δηλαδή να θέσουμε $p_1 = 1$, και στην συνέχεια να μετράμε τις τιμές όλων των αγαθών σε όρους της βάσης μέτρησης. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6A.1) και (6A.2) έτσι ώστε να απαλειφθεί ο όρος $p_t s_t$, έχουμε τον δια βίου εισοδηματικό περιορισμό

$$p_t c_{1t} + p_{t+1} c_{2t+1} = p_t \omega_1 + p_{t+1} \omega_2, \tag{6A.3}$$

ή

$$c_{1t} + \frac{p_{t+1}}{p_t} c_{2t+1} = \omega_1 + \frac{p_{t+1}}{p_t} \omega_2. \tag{6A.4}$$

Συγκρίνοντας τις (6A.4) και (6.3) έχουμε ότι

$$\frac{p_{t+1}}{p_t} = \frac{1}{1 + r_{t+1}}, \tag{6A.5}$$

δηλαδή το μικτό επιτόκιο $1 + r_{t+1}$ είναι ίσο με το λόγο της τιμής της κατανάλωσης την περίοδο t προς την τιμή της κατανάλωσης την περίοδο *t+1*.

Β. Απόδειξη ότι η Ισορροπία σε μια Κλειστή Ομοιογενή Οικονομία Είναι Αυτάρκης

Ας ξεκινήσουμε με την αρχική γενεά. Τα μέλη αυτής της γενεάς ενδιαφέρονται μόνο για την κατανάλωσή τους την περίοδο 1. Επομένως για κάθε τιμή $c_{21} = \omega_2$. Η εκκαθάριση της αγοράς του αγαθού την περίοδο 1 δίνεται από την εξίσωση (6.8), όπου $t = 1$

$$N_1 c_{11} + N_0 c_{21} = N_1 \omega_1 + N_0 \omega_2 .$$

Αφού $c_{21} = \omega_2$, έπεται ότι $c_{11} = \omega_1$. Αντικαθιστώντας αυτή την εξίσωση στον δια βίου εισοδηματικό της γενεάς 1

$$c_{11} + \frac{1}{1+r_2} c_{22} = \omega_1 + \frac{1}{1+r_2} \omega_2 .$$

έχουμε την ισότητα $c_{22} = \omega_2$, την οποία αν χρησιμοποιήσουμε στην εξίσωση που περιγράφει την εκκαθάριση της αγοράς του αγαθού την περίοδο 2

$$N_2 c_{12} + N_1 c_{22} = N_2 \omega_1 + N_1 \omega_2 .$$

θα πάρουμε $c_{12} = \omega_1$. Εργαζόμενοι με αυτό τον τρόπο έχουμε ότι $c_{1t} = \omega_1$ και $c_{2t+1} = \omega_2 \ \forall \ t$.